УДК 519.711

ВЛИЯНИЕ СОРТИРОВОК ВЕРШИН В ГРАФЕ N - МЕРНОГО ЕДИНИЧНОГО КУБА НА ПОГРЕШНОСТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ВЗВЕШЕННОМ МИНИМАЛЬНОМ ПОКРЫТИИ

к.т.н. М.И. Гиневский, Е.С. Листровая, Д.С. Пивнев

Проанализировано влияние сортировок векторов вершин в **n**-мерном единичном кубе по весам в функционале на погрешность приближенных методов решения задачи о наименьшем покрытии (ЗНП) со взвешенными столбцами.

Задача о наименьшем покрытии имеет широкое приложение при управлении сложными системами и является одной из центральных задач кибернетики, теории графов и теории расписаний. Поэтому разработка алгоритмов ее решения повышающих точность и оперативность решения данной задачи представляется актуальным. В общем виде ЗНП описывается следующим образом.

Пусть $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ – транспонированная матрица смежности графа $\mathbf{G\Delta}$ с единичными диагональными элементами. Задача определения наименьшего доминирующего множества графа $\mathbf{G}$ эквивалентна задаче нахождения такого наименьшего множества столбцов в матрице $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$, что каждая строка матрицы содержит единицу хотя бы в одном из выбранных столбцов. Эта задача о поиске наименьшего множества столбцов, «покрывающих» единицами все строки, получила названия задачи о наименьшем (минимальном) покрытии. Однако, в общем случае матрица, состоящая из 0 и 1, не обязательно является квадратной. Кроме того, каждому столбцу $\mathbf{j}$ (вершине $\mathbf{x_j}$) в матрице $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ сопоставляется некоторый вес и требуется найти покрытие с наименьшей общей стоимостью. В случае же равенства коэффициентов задача трансформируется в задачу минимизации числа столбцов, покрывающих все строки в матрице $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$. Другими словами, необходимо минимизировать следующую целевую функцию

$$\mathbf{L} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{c_j x_j} \to \mathbf{min} \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j \geq 1,\ i=\overline{1,m};$$
$$x_j \in \{0,1\};\ c_j \geq 0, \qquad (2)$$

где

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если i - я переменная может быть} \\ & \text{покрыта переменной } x_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (3)$$

Матрицу $B = \|\beta_{ji}\|$ порядка $m \times n$ будем представлять m - мерными векторами

$$B^{(i)} = (\beta_1^i, \beta_2^i, \ldots \beta_m^i),$$

в которых компоненты β_j^i принимают значение **j**, если **j -** я строка покрывается одной из единиц **i** - го столбца и равное 0 в противном случае. Число компонент β_j^i в векторе $B^{(i)}$ равных нулю назовем весовой характеристикой γ_i вектора $B^{(i)}$. Геометрически задача о наименьшем покрытии, определяемая соотношениями (1) - (2), интерпретируется как задача отыскания оптимальной вершины единичного куба в пространстве R^n.

Построим на основе матрицы **B** эквивалент **n** - мерного единичного куба R^n в виде стянутого дерева всех путей , заданного графом **GΔ** [1]. Как показано в [2], множества путей от фиктивной вершины **s** ко всем остальным вершинам этого графа соответствует $2^n - 1$ вариантам возможных решений дерева путей. ЗНП решалась с использованием алгоритмов, предложенных в [2]. При этом сортировка вершин в графе **GΔ** осуществлялась тремя способами:

- в порядке убывания плотностей единиц в столбцах матрицы **B**;
- в порядке возрастания весов столбцов матрицы **B**;
- в порядке убывания отношений плотности единиц в столбцах к весовой характеристике столбца.

Зависимость погрешности решения задачи о наименьшем покрытии от ранга пути и от размерности задачи для различных сортировок показана на рис.1 и рис.2. Как видно из этих рисунков, наиболее эффективной является сортировка по отношению, позволяющая почти в 2 раза уменьшить погрешность решения задачи.

Следует отметить, что с уменьшением погрешности наблюдалось и уменьшение временной сложности исследуемого алгоритма.

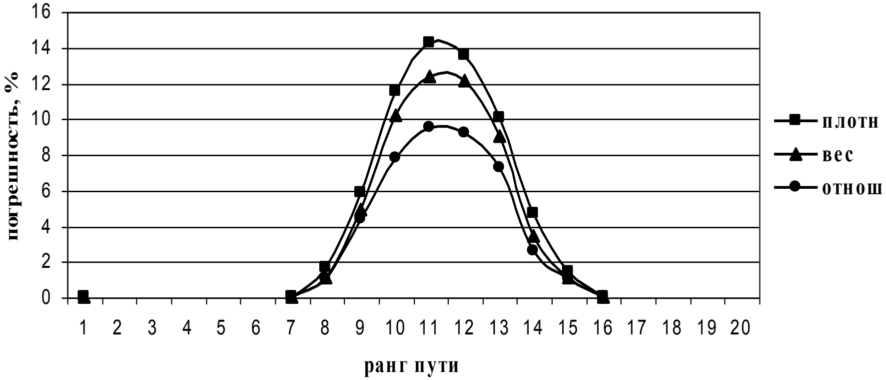

Рис.1. Зависимость погрешности решения ЗНП от ранга пути для различных сортировок

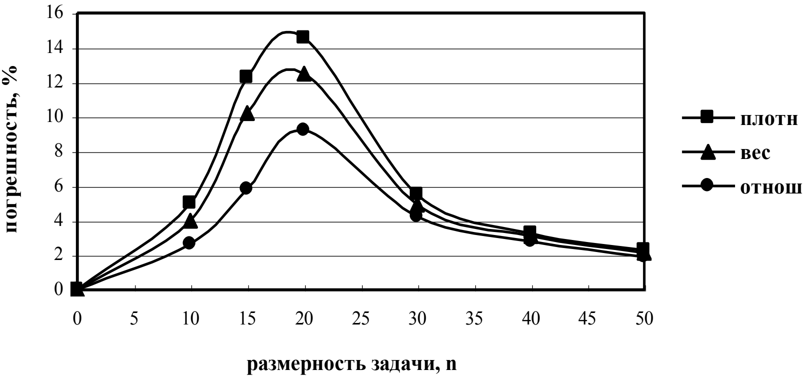

Рис.2. Зависимость погрешности решения ЗНП от размерности задачи для различных сортировок

ЛИТЕРАТУРА

1. Listrovoy S.V., Golubnichiy D.Yu., Listrovaya E.S. Solution Method on the Basis of Rank Approach for integer Linear Programming Problems with Boolean Variables // Engineering Simulation. – 1999. – Vol.16. – P. 707 - 725.

2. Листровой С.В., Гуль А.Ю. Метод решения задачи о минимальном покрытии на основе рангового подхода // Электронное моделирование. – 1999. – № 1. – С. 58 - 70.

Поступила в редколлегию 4.09.2000