УДК 519.8+519.51

МЕТОД РАНЖИРОВАНИЯ КРИТЕРИЕВ В ЗАДАЧЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

д.т.н., проф. В.М. Бильчук, к.т.н. Н.И. Литвинец

Предложен метод ранжирования критериев в задаче многокритериальной оптимизации, дающий возможность реализовать метод последовательных уступок в интересах определения оптимальной стратегии.

При исследованиях операций или функционирования сложных систем не всегда удается разработать единственный критерий их эффективности, который удовлетворял бы всем требованиям, предъявляемым к ним, а именно: требованиям соответствия, полноты, критичности, вычисляемости. Тогда вводят в рассмотрение векторный критерий $\mathbf{K=(K_1, \dots, K_i, \dots, K_n)}$, где $\mathbf{K_i}$ - частный критерий. Так при исследовании эффективности операции, если возникает необходимость определения как потребного количества ресурса, так и рационального способа его использования, то следует рассматривать двухкритериальную задачу, где $\mathbf{K_1}$ - критерий, описывающий количество ресурса, а $\mathbf{K_2}$ - критерий, описывающий результат его использования.

Каждая стратегия $\mathbf{u \in U}$ характеризуется векторной оценкой $\mathbf{K(u)}$. Пусть $\mathbf{X_i}$ - шкала $\mathbf{i}$ - го критерия тогда $\mathbf{X=X_1 x X_2 x \dots x X_n}$ - множество всех векторных оценок. Сравнивать стратегии по предпочтительности можно лишь на основании сопоставления их векторных оценок. На основании правил построения отношений предпочтения во множестве векторных оценок (решающих правил), при отсутствии информации о предпочтениях во множестве $\mathbf{X}$ можно ввести лишь отношение безразличия, которое приводит к отношению безразличия во множестве стратегий. Значения критерия $\mathbf{K}_l$ могут по-разному соотноситься по предпочтительности в зависимости от того, какие значения фиксированы у всех остальных критериев. Такие критерии принято называть зависимыми по предпочтению, в противном случае – независимыми по предпочтению [1]. Если каждый из критериев не зависит по предпочтительности от совокупности всех остальных, то такие критерии называются взаимозависимыми по предпочтительности, а соответствующие задачи – многокритериальными задачами оптимизации.

На множестве векторных оценок определяют отношения нестрогого предпочтения $\mathbf{R}$, строгого предпочтения $\mathbf{P}$ и отношение безразличия $\mathbf{I}$. Эти отношения порождают аналогичные отношения на множестве стратегий. Множество несравнимых по **R** стратегий составляет множество недоминируемых (эффективных) по Парето стратегий. При рассмотрении однокритериальной задачи в качестве оптимальной стратегии может быть принята любая стратегия, которая максимизирует критерий, ибо все эти стратегии сопоставимы по отношению **I**. Хотя множество эффективных стратегий содержит неэффективные стратегии, однако решение задач многокритериальной оптимизации на первом этапе предполагает построение множества эффективных стратегий. Формирование таких множеств формально связано с рассмотрением одношаговых и многошаговых методов решения задач многокритериальной оптимизации. К одношаговым методам относят, прежде всего, метод главного (основного) критерия, а к многошаговым, например, метод последовательных уступок [1].

Выделение главного критерия заключается в преобразовании многокритериальной задачи в однокритериальную. При этом рассматривается задача

$$\max_{u \in U} K_\ell(u)$$

при ограничениях

$$K_i(u) \geq b_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad i \neq \ell .$$

где $K_\ell(u)$ - значение главного (*l*- го) критерия на стратегии **u**; **U** - множество стратегий; b_i - требуемые значения рассматриваемых критериев $K_i(u) \geq b_i, \quad i = \overline{1,n}, i \neq \ell$.

Определение оптимальных стратегий $u^* \in U$ при рассмотрении многокритериальной задачи и ее решения по методу последовательных уступок связано, как отмечено в [1], с решением задачи на **m** - м шаге из следующей последовательности задач.

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{1}.\ \text{Найти}\quad Q_1 = \max\limits_{u \in U} K_1(u). \\
\textbf{2}.\ \text{Найти}\quad Q_2(\Delta_1) = \max\limits_{u \in U} K_2(u), \quad K_1(u) \geq Q_1 - \Delta_1. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\textbf{m}.\ \text{Найти}\quad Q_m(\Delta_1, \Delta_2, .. \Delta_{m-1}) = \max\limits_{u \in U} K_m(u), \\
\qquad\qquad K_i(u) \geq Q_i - \Delta_i, \quad i = \overline{1,m-1}.
\end{array}\right| \qquad (1)$$

В (1) $\Delta_i, \ i = \overline{1,m-1},$ - последовательно назначаемые уступки соответственно по критериям $K_i(u), \ i = \overline{1,m-1}$, в результате изучения характера попарной взаимосвязи критериев. Изучение попарной взаимосвязи критериев проводится в интересах отыскания такого наименьшего значения уступки $\Delta_i > 0$ по критерию $K_i(u)$, которое обеспечило бы наибольшее приращение критерия $K_{i+1}(u)$. Такой подход в отыскании $\Delta_i > 0$ предполагает представление векторных оценок $K_i(u)$ стратегий $u \in U$ в единой шкале, то есть критерии (векторные оценки) должны быть однородными. Если в рассматриваемой задаче имеет место рассмотрение векторных оценок в различных, с точки зрения размерностей, шкальных, то сведение к единой шкале, т.е. обеспечение однородности критериев может быть достигнуто при представлении компонент $K(u)$ в относительных единицах.

Как видно из (1), предлагаемая в [1] процедура решения многокритериальной задачи предполагает представление критериев $K_i(u)$, $i = \overline{1, m}$ по убыванию их важности. А это значит, что реализация процедуры (1) предшествует решение задачи ранжирования совокупности критериев $\{K_i(u)\}_m$. Всегда, на наш взгляд, эта задача ранжирования будет ставиться и решаться в условиях нестохастической неопределенности. Решение таких задач возможно посредством постановки экспертизы и, затем, обработки экспертных данных. Эксперты должны быть информированы о многокритериальной задаче на вербальном уровне и ее физической природе. Схема экспертизы: эксперты независимые, обратная связь отсутствует.

Для любой физической природы многокритериальной задачи более общей постановкой экспертизы следует считать такую постановку, при которой экспертам предлагают высказывать суждения, как отмечено в [2], о нечетких бинарных отношениях в отношении нестрогого предпочтения критериев.

Это означает, что для объектов $D = \{K_i(u)\}_m$ l - й эксперт ($\ell = \overline{1, L}$) представляет функцию принадлежности $\mu^{(\ell)}_{\tilde{R}_{\geq}}\left(K'(u), K''(u)\right)$ нечетких бинарных отношений в отношении нестрогого предпочтения $\tilde{R}_{\geq}$ на множестве D. Под $\tilde{R}_{\geq}$ на множестве D понимаем нечеткое подмножество прямого декартового произведения $D x D$, а $\mu^{(\ell)}_{\tilde{R}_{\geq}}\left(K'(u), K''(u)\right)$ есть его элементы. Исходим из того, что нечеткие бинарные отношения в отношении нестрогого предпочтения $\tilde{R}_{\geq}$ обладают свойством рефлексивности, т.е. $\mu^{(\ell)}_{\tilde{R}_{\geq}}\left(K'(u), K''(u)\right) = 1$ для любых $K'(u) \in D$, а для любой пары $K'(u), K''(u) \in D$ значение функции принадлежности понимается как степень выполнения нечеткого бинарного нестрогого предпочтения:

“<< элемент $\mathbf{K}'(\mathbf{u})$ нечетко не хуже элемента $\mathbf{K}''(\mathbf{u})$>>”. Равенство $\mu^{(\ell)}_{\tilde{R}_{\geq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)=\mathbf{0}$ означает, что элементы $\mathbf{K}'(\mathbf{u})$ и $\mathbf{K}''(\mathbf{u})$ являются несравнимыми между собой. Мнение экспертов усредняются, а по своему представлению $\mu^{(\ell)}_{\tilde{R}_{\geq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)$ и $\mu_{\tilde{R}_{\geq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)$ являются матрицами.

Ранжирование критериев $\{\mathbf{K}_i(\mathbf{u})\}_m$ предлагается проводить по уровням их недоминируемости в ядре нечеткого отношения строго предпочтения на множестве $\mathbf{D}$ вида

$$\mathbf{M}_{\tilde{R}_{\succ}}=\left\{\mathbf{K}^{(m)}(\mathbf{u})\middle|\nexists\mathbf{K}(\mathbf{u})\in\mathbf{D}:\mathbf{K}(\mathbf{u})\succ\mathbf{K}^{(m)}(\mathbf{u});\forall\mathbf{K}(\mathbf{u}),\mathbf{K}^{(m)}(\mathbf{u})\in\mathbf{D}\right\}, \quad (2)$$

где критерий $\mathbf{K}^{(m)}(\mathbf{u})\in\mathbf{D}$ является недоминируемым по отношению строгого предпочтения ибо среди остальных критериев принадлежащих $\mathbf{D}$ не существует ни одного критерия $\mathbf{K}(\mathbf{u})\in\mathbf{D}$, который был бы строго предпочтительнее $\mathbf{K}^{(m)}(\mathbf{u})$.

В интересах определения (2) от матрицы функции принадлежности нечеткого отношения нестрогого предпочтения $\mu_{\tilde{R}_{\geq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)$ переходят к матрице функции принадлежности нечеткого отношения строгого предпочтения по соотношению вида

$$\mu_{\tilde{R}_{\succ}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)=\begin{cases}\mu_{\tilde{R}_{\succeq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)-\mu_{\tilde{R}_{\succeq}}\left(\mathbf{K}''(\mathbf{u}),\mathbf{K}'(\mathbf{u})\right),\\ \quad \text{если } \mu_{\tilde{R}_{\succeq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)\geq\mu_{\tilde{R}_{\succeq}}\left(\mathbf{K}''(\mathbf{u}),\mathbf{K}'(\mathbf{u})\right);\\ \mathbf{0}, \quad \text{если } \mu_{\tilde{R}_{\succeq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)<\mu_{\tilde{R}_{\succeq}}\left(\mathbf{K}''(\mathbf{u}),\mathbf{K}'(\mathbf{u})\right).\end{cases} \quad (3)$$

Функция принадлежности ядра $\mathbf{M}_{\tilde{R}_{\succ}}$ определяется по соотношению вида

$$\mu_{\mathbf{M}_{\tilde{R}_{\succ}}}\left(\mathbf{K}(\mathbf{u})\right)=\min_{\mathbf{K}'(\mathbf{u})\in\mathbf{D}}\left[1-\mu_{\tilde{R}_{\succ}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}),\mathbf{K}''(\mathbf{u})\right)\right], \quad \forall\mathbf{K}(\mathbf{u})\in\mathbf{D}. \quad (4)$$

Расположение критериев $\mathbf{K}(\mathbf{u})\in\mathbf{D}$ по убыванию их степени принадлежности к ядру $\mathbf{M}_{\tilde{R}_{\succ}}$ дает результат – решение задачи ранжирования критериев.

Пусть рассматривается задача определения оптимальной стратегии $\mathbf{u}^* \in \mathbf{U}$ по четырем критериям $\{\mathbf{K_i(u)}\}$, $\mathbf{i = \overline{1,4}}$. При обработке экспертных данных усредненная матрица функции принадлежности нечеткого отношения нестрогого предпочтения имеет вид

$$\mu_{\tilde{R}_{\succeq}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}), \mathbf{K}''(\mathbf{u})\right) = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0{,}9} & \mathbf{0{,}6} & \mathbf{0{,}4} \\ \mathbf{0{,}1} & \mathbf{1} & \mathbf{0{,}7} & \mathbf{0{,}2} \\ \mathbf{0{,}4} & \mathbf{0{,}3} & \mathbf{1} & \mathbf{0{,}3} \\ \mathbf{0{,}6} & \mathbf{0{,}8} & \mathbf{0{,}7} & \mathbf{1} \end{Vmatrix}.$$

Матрица функции принадлежности нечеткого отношения строгого предпочтения, согласно (3), тогда примет вид

$$\mu_{\tilde{R}_{\succ}}\left(\mathbf{K}'(\mathbf{u}), \mathbf{K}''(\mathbf{u})\right) = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0{,}8} & \mathbf{0{,}2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0{,}4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0{,}2} & \mathbf{0{,}6} & \mathbf{0{,}4} & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

а функция принадлежности ядра нечеткого отношения строгого предпочтения, согласно (4), примет вид

$$\mu_{\mathbf{M}_{\tilde{R}_{\succ}}}\left(\mathbf{K}(\mathbf{u})\right) = \left\Vert \mathbf{0{,}8;\;\; 0{,}2;\;\; 0{,}6;\;\; 1.0} \right\Vert.$$

Это означает, что критерии при решении многокритериальной задачи имеют ранжировку: $\mathbf{K_4(u)}$;$\mathbf{K_1(u)}$; $\mathbf{K_3(u)}$; $\mathbf{K_2(u)}$. Если исходить из того, что критерии $\{\mathbf{K_i(u)}\}$, $\mathbf{i = \overline{1,4}}$ приведены к единой шкале измерения, то решение задачи их ранжирования дает в дальнейшем возможность реализовать метод последовательных уступок при решении многокритериальной задачи в интересах определения оптимальной стратегии $\mathbf{u}^* \in \mathbf{U}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подиновский В.В. Математическая теория выработки решений в сложных ситуациях. – М.: МО СССР, 1981. – 211 с.

2. Толубко В. Б., Литвинец Н. И. Принятие решений в операции при учете факторов нестохастической природы // Информационные системы. – Харьков: НАНУ, ПАНУ, ХВУ. – 1994. – Вып. 2. – С. 8 - 13.

Поступила в редколлегию 23.10.2000