УДК 621.3

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ М – МЕРНОЙ ЗАДАЧИ "0,1 – РЮКЗАК" НА ОСНОВЕ РАНГОВОГО МЕТОДА

Е.С. Листровая
(представил д.ф.-м.н., проф. С.В. Смеляков)

Рассмотрены правила отсечения неперспективных вариантов решений в многоэтапных итерационных ранговых алгоритмах и приведены результаты экспериментального исследования влияния сортировок коэффициентов в функционале на погрешность многоэтапных итерационных алгоритмов.

В [1, 2] рассмотрены различные алгоритмы решения **m** - мерной задачи "0,1 - рюкзак". Среди алгоритмов, предложенных в [1], наиболее эффективными можно считать многоэтапные алгоритмы, позволяющие получать точное решение на основе предварительного этапа получения приближенного решения и использования приближенного решения первого этапа для отсева неперспективных вариантов решения на втором этапе. Ясно, что чем более точное решение получено на первом этапе, тем более эффективнее отсекаются неперспективные варианты решений на втором этапе и, следовательно, меньшее число операций выполняет алгоритм и соответственно работает быстрее. Для повышения точности предварительного этапа предлагается итерационное его повторение до тех пор, пока на некотором шаге текущей итерации не окажется, что значение функционала не улучшилось по отношению к предыдущей итерации. После этого можно переходить к получению точного решения. Если время на принятие решения при управлении мало, то можно ограничится полученным приближенным решением. Поэтому представляет интерес исследование погрешностей алгоритмов решения задачи "0,1 - рюкзак" на основе предлагаемой итерационной процедуры. В [4] показано, что при решении одномерной задачи "0,1 - рюкзак" наиболее эффективной сортировкой, обеспечивающей минимальную погрешность в районе 2%, является сортировка коэффициентов в функционале в порядке убывания отношений

$$\frac{\mathbf{c_1}}{\mathbf{a_{11}}} \geq \frac{\mathbf{c_2}}{\mathbf{a_{21}}} \geq \ldots \geq \frac{\mathbf{c_n}}{\mathbf{a_{n1}}}.$$

В случае **m** - мерной задачи такая сортировка невозможна, поскольку вместо одного ограничения используется **m** ограничений. Поэтому введем параметр ψ_j , по которому следует осуществлять сортировку коэффициентов в функционале. Значения ψ_j предлагается брать по одному из следующих соотношений:

$$\Psi_j = \frac{c_j}{\max\limits_i \overset{*}{a}_{ij}}; \quad \Psi_j = \frac{c_j}{\max\limits_i \overset{*}{a}_{ij} - \min\limits_i \overset{*}{a}_{ij}}; \quad \Psi_j = \frac{c_j}{(\max\limits_i \overset{*}{a}_{ij})\sum\limits_{i=1}^{m} \overset{*}{a}_{ij}};$$

$$\Psi_j = \frac{c_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} \overset{*}{a}_{ij}}, \qquad \text{где } \overset{*}{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i}.$$

Смысл приведенных соотношений для ψ_j состоит в назначении тем большего веса параметра ψ_j , чем больший относительный вклад в значение целевой функции обеспечивается при значении переменной X_j=1 (относительный вклад определяется отношением C_j к той или иной общей оценке использования ресурсов, задаваемых ограничениями, при назначении X_j=1). Кроме данных типов сортировок будем также использовать сортировку в порядке убывания C_j. При построении итерационного алгоритма из множества правил $\{L_W\}$ [1] отсечения неперспективных вариантов решений будем рассматривать правила отсечений неперспективных вариантов при решении задач ЦЛП с БП с использованием итеративного подхода.

Наиболее простой стратегией отсечений L_1 при формировании $r'=r+1$ путей следующего ранга в множествах $m_{sp}^{r'=r+1}$, на основе процедуры A_0, является выделение в m_{sj}^r путей максимальной длины по весам функционала c_j, длины которых по весам ограничений не превышают величины b_i, т.е. $d_a\left(\mu_{sj}^r\right)_i \le b_i$. В этом случае путями, удовлетворяющими свойству ν, будем называть пути μ_{sj}^r, длины которых по весам ограничений не превышают величину b_i. Тогда рекуррентное соотношение (2.6), соответствующее стратегии L_1 и определяющее принцип оптимизации по направлению в графе G_Δ принимает вид

$$\mu_{sp}^{r'=r+1} = \max_{c_j}\left\{\mu_{sj}^r \cup (j,p)\right\}; \; p = \overline{(r+1,n)}; \;\; j = \overline{(r,n)}. \tag{1}$$

При этом проверка условия

$$d_c\left(\mu_{sp}^r\right) + \gamma_p < \max_{\{c_j\}}\left\{d_c\left|\left(\overset{*}{\mu}{}_{sp}^r\right)\right|\right\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{d_c}\left(\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sp}}\right)$ - длина пути $\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sp}}$ к вершине **p** ранга **r** по весам $\mathbf{c_j}$, позволяет исключить этот путь из дальнейшего анализа, как бесперспективный, если условие (2) выполнено.

Как следует из (2), на основе рангового подхода можно более точно определять верхнюю оценку $\widehat{\mathbf{z}}_{\mathbf{в}} = \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{r}}_{\mathbf{в}})$ за счет того, что путь $\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sj}}$ не всегда может быть продлен на все ранги, как неудовлетворяющий свойству $\boldsymbol{\nu}$. Другими словами, на основании равенства (1):

$$\gamma_{\mathbf{j}} = \widehat{\mathbf{z}}^{\mathbf{в}}_{\mathbf{j}\widehat{\mathbf{r}}_{\mathbf{в}}}\left(\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sj}}\right) \tag{3}$$

можно увеличить эффективность фильтрации неперспективных путей, используя стратегию на основе

$$\mathbf{d_c}\left(\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sp}}\right) + \hat{\mathbf{z}}^{\mathbf{в}}_{\mathbf{p r в}}\left(\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sp}}\right) < \max_{\mathbf{Cj}}\{\mathbf{d_c}(\mu^{*\mathbf{r}}_{\mathbf{sp}})\}. \tag{4}$$

Проверка неравенства (4) позволит отсечь путь $\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sp}}$ из дальнейшего анализа как не перспективный, так как мы заранее знаем, что более чем на $\widehat{\mathbf{r}}_{\mathbf{в}}$ рангов путь $\mu^{\mathbf{r}}_{\mathbf{sp}}$ не может быть продлен.

Как показано в [3], количественные значения временной сложности и погрешности алгоритмов на основе рангового подхода существенно зависят от ранга $\bar{\mathbf{r}}$ получаемого решения, который определяет число единиц в оптимальном решении. Диапазон изменения $\bar{\mathbf{r}}$ можно условно разбить на три зоны:

- 1 зона - $\bar{\mathbf{r}} = [\mathbf{0} \div \mathbf{n}/\mathbf{3}]$;
- 2 зона - $\bar{\mathbf{r}} = [\mathbf{n}/\mathbf{3} \div \mathbf{2n}/\mathbf{3}]$;
- 3 зона - $\bar{\mathbf{r}} = [\mathbf{2n}/\mathbf{3} \div \mathbf{n}]$.

В первой зоне алгоритм **D** находит решение быстро, поскольку за счет зондирования очень эффективно отсекаются ветви дерева решений, соответствующие единичным ветвлениям. Аналогичным образом объясняется и быстрое получение решения в 3 зоне, вектора в которой состоят из большого числа единиц. Проявление экспоненциальной сложности алгоритма **D** происходит именно во второй зоне. Следует отметить, что приближенные алгоритмы в зонах 1 и 3 дают точные решения, а погрешность проявляется во второй зоне.

Таким образом, для объективного сравнения алгоритмов необходимо указывать к какой зоне они принадлежат, т.е. какой процент единиц (или нулей) содержит оптимальное решение. Экспериментальное исследование влияния сортировок на погрешность решения показало, что лучшей сортировкой является сортировка векторов в порядке убывания весов функционала, а все остальные сортировки практически равноценны с точки зрения даваемой погрешности решения. Это видно из рис 1.

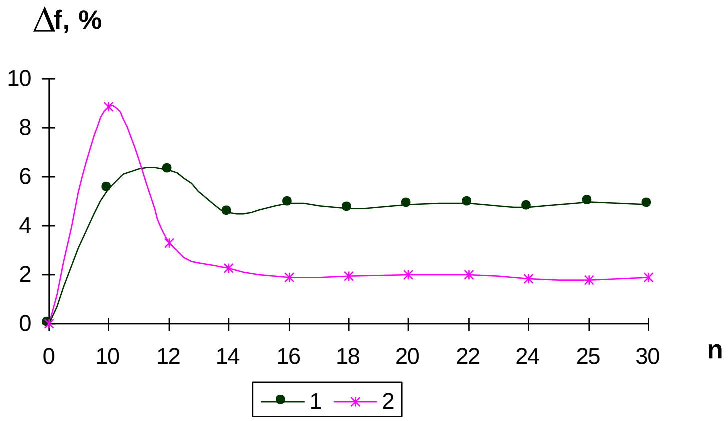

Рис. 1. Зависимость **Δf** от **n** для зоны 2

На рис. 1 кривая 1 соответствует сортировке векторов в порядке убывания весов функционала, а кривая 2 – всем остальным сортировкам, рассмотренным в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Листровой С.В., Голубничий Д.Ю., Листровая Е.С. Метод решения задач целочисленного линейного программирования с булевыми переменными на основе рангового подхода // Электронное моделирование. – 1998. – Т.20, №6. – С. 14 - 32.

2. Листровой С.В., Третьяк В.Ф., Листровая А.С. Параллельный алгоритм оптимизации вычислительного процесса для задач булевого программирования // Электронное моделирование. – 1998. – №5. – С. 23 - 33.

3. Listrovoy S.V., Golubnichiy D.Y., Listrovaya E.S. Solutioon Method on the Basis of Rank Approach for integer Linear Programming Problems with Boolean Variables // Engineering Simulation. – 1999. – Vol.16. – P. 707 – 725.

4. Listrovoy S.V., Tretiak V.F., Listrovaya E.S. Parallel Algorithms of Calculation Process Optimization for the Boolean Programming Problems // Engineering Simulation. – 1999. – Vol.16. – P. 569 – 579.

Поступила в редколлегию 19.02.2001