

АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

проф. А.В. Королев, К.А. Бохан

Предлагается алгоритм быстрого преобразования Хаара с возможностью конвейерной обработки поступающих отсчетов, а также устройство, реализующее данный алгоритм.

При цифровой обработке сигналов, изображений используются различные ортогональные преобразования, в том числе и преобразование Хаара [1 - 3]. Несмотря на интенсивное развитие микроэлектроники, создание все более быстродействующих процессоров, запоминающих устройств с большими объемами памяти, более скоростных сред передачи данных, создание алгоритмов быстрых преобразований (БП) остается актуальным. Быстрые преобразования позволяют значительно сократить как количество арифметических операций, а, значит, и время выполнения преобразований, так и объем памяти, необходимой для выполнения преобразования. В связи с тем, что преобразование Фурье получило наибольшее распространение за счет многочисленных работ в области связи, то и работы по созданию алгоритмов БП в основном велись для этого вида преобразования. Причем для других видов ортогональных преобразований (Адамара, Уолша, Хаара и др.) часто используются эти же алгоритмы с небольшими модификациями. Такой подход не учитывает особенности тех или иных ортогональных базисов, что сказывается на эффективности алгоритма быстрого преобразования. Примером может служить использование алгоритма Кюли - Тьюки для выполнения различных преобразований [1]. Например, при вычислении преобразования Хаара с помощью алгоритма Кюли - Тьюки требуется $\text{Log}_2 N$ двоичных инверсий, $2(N-1)$ сложений/вычитаний и N умножений [1]. В этом алгоритме при достаточно большом N выполнение двоичной инверсии занимает много времени.

В последние годы ведутся интенсивные работы по дальнейшему усовершенствованию БП. Для этого используются методы теории чисел, теории полиномиальных преобразований, а также представление быстрых матричных преобразований с помощью факторизованных матриц [2, 3]. Хотя данные алгоритмы и позволяют уменьшить время выполнения преобразования, но техническая реализация этих алгоритмов достаточно сложна, а некоторые из них и не универсальны [4]. Примером эффективного и простого в реализации алгоритма БП Хаара может служить алгоритм, предложенный Эндрюсом [1]. Данный алгоритм требует выполнения $2(N-1)$ операций сложений/вычитаний

и N операций умножений.

На рис.1 приведен граф алгоритма Эндрюса для прямого (а) и обратного (б) преобразования Хаара при $N = 8$, где $Y_x(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ – коэффициенты преобразования Хаара, соответствующие входной последовательности $\{X(m)\} = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$. Как видно из графа, процедура преобразования может начаться только после поступления всей последовательности, что вносит дополнительные временные задержки в процесс преобразования.

Необходимо разработать алгоритм быстрого преобразования Хаара (БПХ), который бы позволял начинать процедуру преобразования уже при получении первых элементов входной последовательности без увеличения количества операций. Кроме этого, алгоритм должен иметь простую техническую реализацию. Известно, что преобразование Хаара имеет следующее матричное соотношение [1]:

$$Y_x = \frac{1}{N} H^*(n) X(n), \quad (1)$$

$$X(n) = H^{*\Gamma}(n) Y_x(n), \quad (2)$$

где $H^*(n)$ – матрица Хаара размером $(N \times N)$.

Матрица $H^*(n)$ формируется в результате дискретизации множества функций Хаара $\{\text{har}(r, m, t)\}$:

$$\text{har}(r, m, t) = \begin{cases} 2^{r/2} & \text{при } \frac{m-1}{2^r} \leq t < \frac{m-1/2}{2^r}; \\ -2^{r/2} & \text{при } \frac{m-1/2}{2^r} \leq t < \frac{m}{2^r}; \\ 0 & \text{при остальных } t \in [0, 1), \end{cases} \quad (3)$$

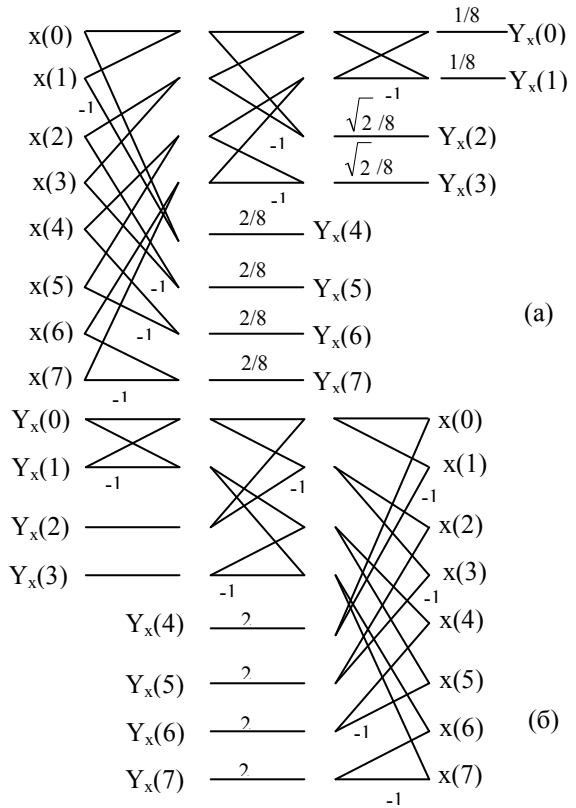


Рис.1. Граф прямого (а) и обратного (б) преобразования Хаара, соответствующий алгоритму Эндрюса при $N = 8$

где $0 \leq r < \text{Log}_2 N$ и $1 \leq m \leq 2^r$.

Пример матрицы Хаара $H^*(3)$ размерностью (8×8) представлен на рис.2.

$$H^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Рис. 2. Пример матрицы Хаара

Для построения алгоритма входная N - точечная последовательность разделяется на 2 части. В каждой из них остается $N/2$ отсчетов. Выделенные $N/2$ - точечные последовательности, в свою очередь, разделяются на две части, в которых уже будет по $N/4$ отсчетов. Продолжая дальнейшее деление отсчетов $X(n)$ на части, придем, в конечном счете, к представлению дискретного преобразования Хаара (ДПХ) четырехточечных последовательностей в функции от ДПХ двухточечных последовательностей. Таким образом, оказывается возможным выразить ДПХ всей первоначально заданной последовательности N отсчетов $X(n)$ в функции от ДПХ только двухточечных отсчетов $X(n)$, выбранных надлежащим образом. Например, Эндрюс при разработке своего алгоритма использовал прореживание входной последовательности по времени (рис. 3,а). Для решения поставленной задачи используется прореживание по частоте (рис.3,б). Берутся первые $N/2$ отсчетов и следующие за ним $N/2$ отсчетов, каждые из которых образуют по $N/2$ - точечной последовательности. Введем для них следующие обозначения:

$$X_1 = X(n); \quad X_2 = X(n + \frac{N}{2}), \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5)$$

Запишем преобразование Хаара для каждой из частей:

$$Y_{x1}(r, m) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_1(n) \text{har}(r, m, n); \quad Y_{x2}(r, m) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_2(n) \text{har}(r, m, n + \frac{N}{2}). \quad (6)$$

При этом спектр Хаара рассчитывается по формуле

$$Y_X(r, m) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_1(n) \text{har}(r, m, n) + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_2(n) \text{har}(r, m, n + \frac{N}{2}) \right]. \quad (7)$$

Изобразим графически процедуру БПХ. При этом дополним то, что уже было сказано выше. Для этого ограничимся примером выполнения восьмиточечного БПХ ($N = 8$). Аналогичным образом могут быть представлены графы БПХ и при больших значениях N . Обратимся к матрице Хаара (4). Из ее анализа следует, что в выражениях (6) - (7) возможно появление трех случаев: а) значения $\text{har}(r, m, n)$ и $\text{har}(r, m, n + N/2)$ равны; б) значения $\text{har}(r, m, n)$ и $\text{har}(r, m, n + N/2)$ противоположны по знаку; в) значения $\text{har}(r, m, n)$ и (или)

$\text{har}(\mathbf{r}, \mathbf{m}, \mathbf{n} + \mathbf{N}/2)$ равны нулю. Указанное значительно упрощает выражение (7). На рис.4 приведен граф БПХ соответствующий формулам (6) - (7).

Из рис. 4 следует, что данный алгоритм, как и алгоритм Эндрюса, требует выполнения $2(\mathbf{N} - 1)$ операций сложений / вычитаний и \mathbf{N} операций умножений. Но отличием является то, что процесс преобразования можно уже начинать при поступлении первых 2-х отсчетов, не дожидаясь поступления остальных. Такой подход дает заметный выигрыш по времени выполнения преобразования. Техническая и программная реализация данного алгоритма очень проста. При этом возможна как конвейерная, так и параллельная

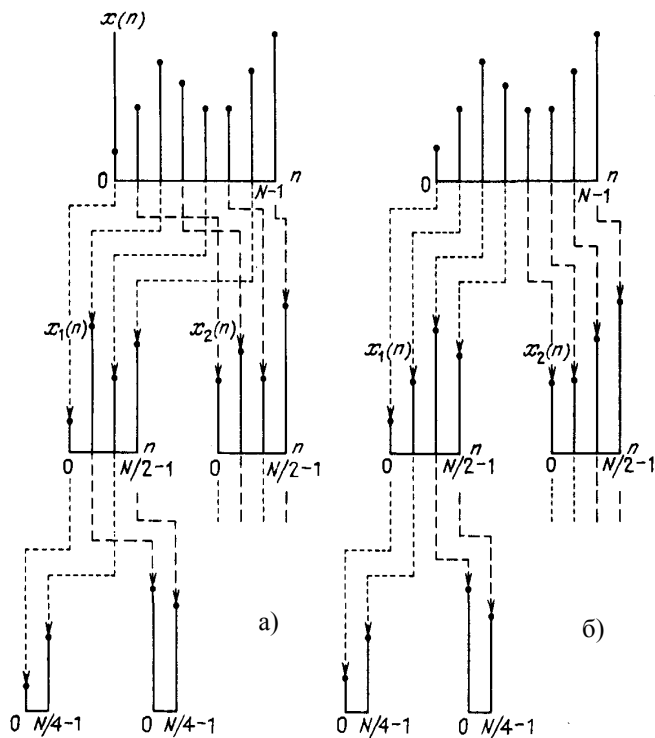


Рис.3. Прореживание последовательности по времени (а) и по частоте (б)

обработка поступающих отсчетов. Это упрощает устройство и дает дополнительный выигрыш во времени выполнения преобразования. На рис.5 в качестве примера приведена структурная схема конвейерного устройства преобразования Хаара.

Устройство работает следующим образом. Входная последовательность отсчетов поступает в вычислитель первой ступени (1-й этап конвейера). На каждом этапе вычисляется сумма и разность отсчетов. Результат суммирования поступает в вычислитель следующей ступени (на следующий этап конвейера), а разность отсчетов умножается на соответствующий коэффициент (для каждого этапа конвейера свой коэффициент).

В результате этого получаем один из коэффициентов преобразования. Коэффициенты Хаара $Y_x(4) - Y_x(7)$ формируются в вычислителе первой ступени (т.е. уже после первого этапа конвейера), коэффициенты $Y_x(2)$ и $Y_x(3) -$

в вычислителе второй ступени (после второго этапа), а $Y_x(0)$ и $Y_x(1)$ – в вычислителе третьей ступени (после третьего (последнего) этапа). Таким обра-

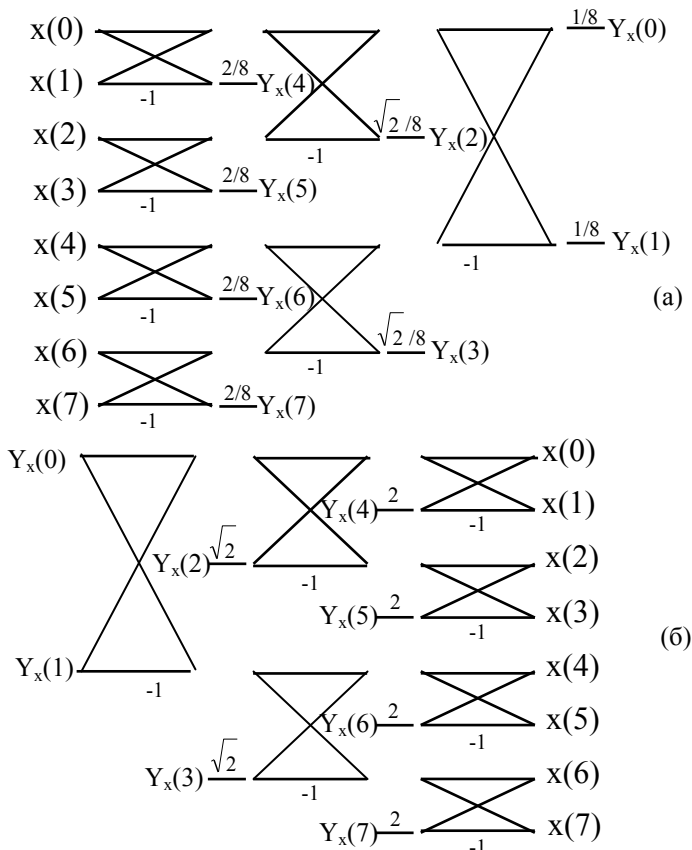


Рис. 4. Граф прямого (а) и обратного (б) БПХ при частотном разделении входной последовательности

зом, на выходе устройства образуется трансформанта Хаара входной последовательности.

Разработанный алгоритм позволяет сократить объем вычислений на несколько порядков. Так, например, при $N = 1024$ при прямом методе (перемножение матриц) необходимо выполнить 1047552 сложений/вычитаний и 1048576 умножений, а при использовании разработанного алгоритма только 1024 умножений и 2046 сложений. Его можно применять для обработки как сигналов, так и изображений.

Особенностью использования данного алгоритма для обработки изображений является то, что сначала обрабатываются столбцы массива данных

изображения, а затем строки полученного массива. При этом необходимо предусмотреть блоки памяти для сохранения промежуточного массива.

Увеличение длины входной последовательности N (количества используемых функций Хаара) приведет только к увеличению числа этапов конвейера и числа регистров в блоке регистров. Это позволяет достаточно легко строить устройства для различных длин входных последовательностей, а также устройства с переменной длиной входной последовательности. В последнем случае для каждой длины входной последовательности используется только



Рис. 5. Конвейерное устройство преобразования Хаара

необходимое количество вычислителей (этапов конвейера).

Структура устройства не зависит от используемой разрядности данных. Например, для обработки 8 – разрядных данных используются 8 – разрядные вычислители, для 16 – разрядных – 16 – разрядные вычислители при сохранении одной и той же структуры устройства и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. И.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
2. Ярославский Л.П. Некоторые вопросы теории дискретных ортогональных преобразований сигналов // Цифровая обработка сигналов и ее применения. – М.: Наука, 1981. – 186 с.
3. Залмазон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
4. Садыхов Р.Х., Шаренков А.В., Нечаев Н.В. Связь между взаимными временными и спектральными характеристиками в базисах Фурье и Уолша // Вычислительная техника в машиностроении. – 1982. – №2. – С. 88 - 94.

Поступила в редакцию 12.03.2001
