УДК 621.565

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СКАЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

к.ф.-м.н. Д.В. Дмитришин, д.т.н. В.М. Вартанян, к.ф.-м.н. Г.М. Вартанян

Получены эффективно проверяемые достаточные условия устойчивости скалярного дифференциально - разностного уравнения на основе загрубления его параметров.

Устойчивость системы линейных дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x}(t) = -A_0 x(t) - \sum_{j=1}^{m} A_j \cdot x(t-\tau_j),$$

где x - n-мерный вектор; $A_0, A_1, \ldots, A_m$ - постоянные $(n \times n)$ - матрицы, $\tau_1, \ldots, \tau_m$ - положительные величины, называемые запаздываниями, характеризуется принадлежностью открытой левой полуплоскости всех нулей характеристического квазиполинома

$$f(\lambda) = \det\left(\lambda E + A_0 + \sum_{j=1}^{m} A_j \cdot e^{-\lambda\tau_j}\right).$$

Квазиполиномы с таким расположением нулей называются устойчивыми. Алгебраические критерии устойчивости квазиполиномов известны [1-3]. Однако, необходимые и достаточные условия устойчивости в терминах коэффициентов и запаздываний, аналогичные критерию Рауса-Гурвица для полиномов, пока не получены. Вследствие этого, актуальной является задача поиска простых достаточных коэффициентных условий устойчивости квазиполиномов. В настоящей статье рассматривается случай одного уравнения, характеристический квазиполином которого записывается в виде

$$f(\lambda) = \lambda + a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot e^{-\lambda\tau_j}, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – некоторые константы.

Положим $k = \sum_{j=1}^{m} a_j$ (считаем $\sum_{j=1}^{m} a_j \neq 0$), $L = \frac{1}{|k|} \cdot \sum_{j=1}^{m} |a_j|$,

$\tau = \max\{\tau_1, ..., \tau_m\}$. Случай $\sum_{j=1}^{m} a_j = 0$ рассмотрим позже. Введем семейство квазиполиномов

$$\left\{ f(\lambda) = \lambda + a_0 + k\int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma} dg(\sigma) \,\middle|\, g(\sigma) \in G \right\}, \tag{2}$$

где $G = \left\{ g(\sigma) \in BV([0,1]) \,\middle|\, \int_0^1 dg(\sigma) = 1, \int_0^1 |\, dg(\sigma)| \le L \right\}$, $BV([0,1])$ - пространство функций ограниченной вариации на [0,1]. Интегралы понимаются в смысле Лебега – Стилтьеса. Очевидно, что квазиполином (1) содержится в семействе (2).

Получим необходимые и достаточные условия устойчивости всех квазиполиномов семейства (2), которые, очевидно, будут достаточными для устойчивости квазиполинома (1).

Представим семейство квазиполиномов (2) в виде

$$\left\{ k \cdot \left(\frac{\lambda}{k} + (1 + C) - \int_0^1 (1 - e^{-i\lambda\tau\sigma}) dg(\sigma) \right) \,\middle|\, g(\sigma) \in G \right\},$$

где $C = a_0 / k$, и применим к этому семейству принцип исключения нуля [4]. Получим следующее утверждение.

Лемма 1. Все квазиполиномы семейства (2) устойчивы в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

1) квазиполином

$$f(\lambda) = \lambda + a_0 + ke^{-\lambda\tau} \tag{3}$$

устойчив;

2) для всех $\varphi \ge 0$ множество

$$\Re(\varphi) = \left\{ z = \int_0^1 (1 - e^{-i\varphi\sigma}) dg(\sigma) \,\middle|\, g(\sigma) \in G \right\}$$

не содержит точки $z_0(\varphi) = 1 + C + \dfrac{i\varphi}{k\tau}$.

Анализ устойчивости квазиполинома (3) показывает, что, во - первых, условие $a_0 + k > 0$ — необходимо для устойчивости квазиполиномов семейства (2), во - вторых, существует критическое значение запаздывания τ_0, характеризующееся тем, что при $\tau \in [0, \tau_0)$ квазиполиномы семейства (2) устойчивы, а при $\tau \ge \tau_0$ в этом семействе обязательно имеются неустойчивые квазиполиномы. При этом из условия 1) леммы следует, что

$$\tau_0 \le \frac{2}{\sqrt{k^2 - a_0^2}} \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{k - a_0}{k + a_0}} .$$

Для нахождения τ_0 изучим множество $\Re(\varphi)$. Уравнения границ этого множества найдены в [5] (рис.1).

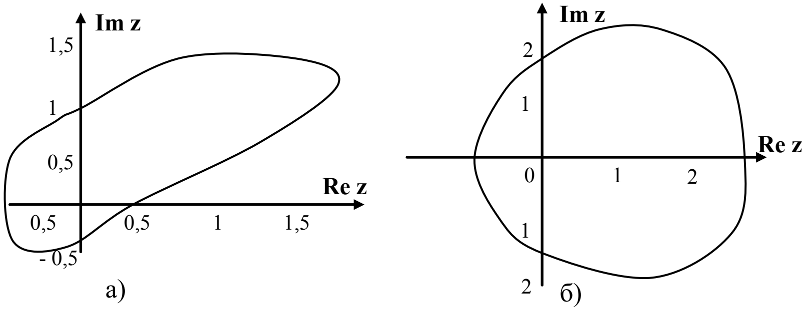

Рис. 1. Область $\Re(\varphi)$: а) при $\varphi \in [0,\pi]$; б) при $\varphi \in [\pi,2\pi]$

Для $\varphi \in [0,\pi]$ границу $\Re(\varphi)$ можно представить как объединение шести кривых:

$$l_1 = \left\{ z = \frac{L+1}{2}(1 - e^{-i\varphi t_1}) \;\middle|\; t_1 \in [\tfrac{1}{2}, 1] \right\};$$

$$l_2 = \left\{ z = -\frac{L-1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) + \frac{L+1}{2}(1 - e^{-i\varphi t_2}) \;\middle|\; t_2 \in [0, \tfrac{1}{2}] \right\};$$

$$l_3 = \left\{ z = -(1 - t_3)\frac{L-1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) + \frac{L+1}{2}(1 - e^{-i\frac{\varphi}{2}}) \;\middle|\; t_3 \in [0,1] \right\};$$

$$l_4 = \left\{ z = -\frac{L-1}{2}(1 - e^{-i\varphi t_4}) \;\middle|\; t_4 \in [\tfrac{1}{2}, 1] \right\};$$

$$l_5 = \left\{ z = \frac{L+1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) - \frac{L-1}{2}(1 - e^{-i\varphi t_5}) \;\middle|\; t_5 \in [0, \tfrac{1}{2}] \right\};$$

$$l_6 = \left\{ z = (1 - t_6)\frac{L+1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) - \frac{L-1}{2}(1 - e^{-i\frac{\varphi}{2}}) \;\middle|\; t_6 \in [0,1] \right\}.$$

Введем функцию $F(\varphi) = \sup\left(\operatorname{Im}\left\{ \int_0^1 (1 - e^{-i\varphi\sigma}) dg(\sigma) \right\} \right)$, где sup берется по всем $\mathbf{g(\sigma)\in G}$, удовлетворяющим равенству $\mathbf{Re}\left\{\int_0^1 (1-e^{-i\varphi\sigma})dg(\sigma)\right\} = 1+C$.

Для записи функции $\mathbf{F(\varphi)}$ в аналитической форме достаточно ограничиться рассмотрением кривых l_1, l_2, l_3 при $\mathbf{1+C>0}$ и l_4, l_5, l_6 при $\mathbf{1+C<0}$. Пусть $\mathbf{C>-1}$. Найдем значения параметров $\mathbf{t_1, t_2, t_3}$, при которых кривые l_1, l_2, l_3 пересекаются с лучом $\{z \mid \mathrm{Re}\, z = 1+C, \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$. При этом считаем, что $\mathbf{C \leq L}$. В противном случае, множество $\mathfrak{R}(\varphi)$ не имеет общих точек с лучом.

Пусть $\mathbf{t_0}$ - решение уравнения

$$\frac{L+1}{2}(1-\cos\varphi t) = 1+C. \tag{4}$$

Тогда $\mathbf{F(\varphi)} = \frac{L+1}{2}\sin\varphi t_0 = (1+C)\mathrm{ctg}\frac{\varphi t_0}{2}$. Так как

$\mathrm{ctg}\frac{\varphi t_0}{2} = \sqrt{\frac{(L+1)-(1+C)}{1+C}} = \sqrt{\frac{L-C}{1+C}}$, то окончательно получаем

$$F(\varphi) = \sqrt{(1+C)(L-C)}. \tag{5}$$

Аналитическое выражение (5) верно для $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, где значения

$$\varphi_0 = 2\mathrm{arcctg}\sqrt{\frac{L-C}{1+C}}, \varphi_1 = 2\varphi_0 \tag{6}$$

получаются в результате подстановки $\mathbf{t = 1}$ и $\mathbf{t = 1/2}$ в (4).

Рассмотрим теперь уравнение

$$-(1-t)\frac{L-1}{2}(1-\cos\varphi) + \frac{L+1}{2}(1-\cos\frac{\varphi}{2}) = 1+C,$$

из которого получаем

$$1-t = \frac{(L+1)\sin^2\frac{\varphi}{4} - (1+C)}{(L-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Следовательно,

$$F(\varphi) = -\frac{(L+1)\sin^2\frac{\varphi}{4} - (1+C)}{(L-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{L-1}{2} \cdot \sin\varphi + \frac{L+1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = .$$

$$= \frac{L-C}{2}\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4} + \frac{1+C}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{4}.$$

Полагая $\mathbf{t=0}$, найдем правую границу изменения φ:

$$\varphi_2 = 4\arcsin\sqrt{S}\ ,\ S = \frac{(3L-5)+\sqrt{(3L-5)^2+16(L-1)(1+C)}}{8(L-1)}\ . \qquad (7)$$

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$-\frac{L-1}{2}(1-\cos\varphi)+\frac{L+1}{2}(1-\cos\varphi t)=1+C\,.$$

Так как $F(\varphi)=-\frac{L-1}{2}\sin\varphi+\frac{L+1}{2}\sin\varphi t$, то, исключая t, получим

$$F(\varphi)=-\frac{L-1}{2}\sin\varphi+\sqrt{(1+C)+(L-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\sqrt{(L-C)+(L-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}\ .$$

Правую границу изменения аргумента определим из условия пересечения окружности $\left(\operatorname{Re} z-1\right)^2+\left(\operatorname{Im} z\right)^2=L^2$ и луча $\left\{z \mid \operatorname{Re} z=1+C, \operatorname{Im} z\ge 0\right\}$. Следовательно, $F(\varphi_3)=\sqrt{L^2-C^2}$. Разрешая это уравнение относительно φ_3, получим

$$\varphi_3 = 2\pi-\operatorname{arcctg}\frac{C}{\sqrt{L^2-C^2}}\ . \qquad (8)$$

Выпишем окончательный вид функции $F(\varphi)$ при $C\in(-1,L)$:

$$F\left(\varphi\right)=\begin{cases}\sqrt{(C+1)(L-C)},\ \ \varphi_0\le\varphi\le\varphi_1\ ;\\ \frac{1+C}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}+\frac{L-C}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4},\ \ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\ ;\\ -\frac{L-1}{2}\sin\varphi+\sqrt{1+C+(L-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\sqrt{L-C+(L-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}},\ \ \varphi_2\le\varphi\le\varphi_3,\end{cases}$$

где величины $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ определяются формулами (6), (7), (8).

Если $C\in(-L,-1)$, то рассматривая кривые l_4,l_5,l_6 и проводя аналогичные преобразования, получим:

$$F(\varphi)=\begin{cases}\sqrt{-(1+C)(L+C)},\ \ 2\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{L+C}{-(1+C)}}\le\varphi\le 4\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{L+C}{-(1+C)}}\ ;\\ -\frac{1+C}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}+\frac{L+C}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4},\ \ 4\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{L+C}{-(1+C)}}\le\varphi\le 4\arcsin\sqrt{S_1}\ ;\\ -\frac{L+1}{2}\sin\varphi+\sqrt{(-(1+C)+(L+1)\sin^2\frac{\varphi}{2})(L+C-(L+1)\sin^2\frac{\varphi}{2}},\end{cases}$$

$$4\arcsin\sqrt{S_1}\le\varphi\le 2\pi-\operatorname{arcctg}\frac{-C}{\sqrt{L^2-C^2}}.$$

где $\mathbf{S_1 = \dfrac{3L+5+\sqrt{(3L+5)^2-16(C+1)(L+1)}}{8(L+1)}}$.

Ясно, что точка $\mathbf{z_0 = 1 + C + \dfrac{i\varphi}{k\tau}}$ $\mathbf{(C \in (-L, L),\ C \neq -1)}$ будет находиться вне множества $\Re(\varphi)$, если выполняется неравенство

$$\mathbf{\frac{\varphi}{|k| \cdot \tau} > F(\varphi)} \tag{9}$$

для всех $\mathbf{\varphi \geq \varphi_0 = 2 arcctg \sqrt{\dfrac{L+C}{|1+C|}}}$. Анализ графика функции $\mathbf{F(\varphi)}$ позволяет заметить, что, если

$$\mathbf{\frac{\varphi_0}{|k| \cdot \tau} > F(\varphi_0)}\,, \tag{10}$$

то и для всех $\mathbf{\varphi \geq \varphi_0}$ неравенство (9) выполнено.

Выписывая явный вид неравенства (10), приходим к утверждению.

Лемма 2. Пусть $\mathbf{a_0 + k > 0}$ и $\mathbf{a_0 < |k| \cdot L}$. Тогда необходимым и достаточным условием устойчивости всех квазиполиномов семейства (2) служит неравенство

$$\mathbf{\tau < \frac{2}{\sqrt{(L + \frac{a_0}{k})(a_0 + k) \cdot |k|}} arcctg \sqrt{\frac{(L + \frac{a_0}{k}) \cdot |k|}{a_0 + k}}}\,. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь случай $\mathbf{\sum\limits_{J=1}^{m} a_j = 0}$. Положим $\mathbf{L = \sum\limits_{J=1}^{m} |a_j|}$. В этом случае, вместо дуг $\boldsymbol{l_1, \ldots, l_6}$ следует рассматривать дуги, уравнения которых получаются из уравнений для дуг $\boldsymbol{l_1, \ldots, l_6}$ в результате замены величин $\mathbf{\dfrac{L-1}{2}}$, $\mathbf{\dfrac{L+1}{2}}$ на $\mathbf{\dfrac{L}{2}}$. Аналогом неравенства (11) является

$$\mathbf{\tau < \frac{2}{\sqrt{a_0 (L - a_0)}} arcctg \sqrt{\frac{(L - a_0)}{a_0}}}\,. \tag{12}$$

Неравенства (11), (12) позволяют сформулировать достаточные условия устойчивости уравнения

$$\mathbf{\dot{x}(t) = -a_0 x(t) - \sum_{j=1}^{m} a_j x(t - \tau_j)}\,. \tag{13}$$

Теорема. Пусть $a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j > 0$. Если $a_0 > \sum_{j=1}^{m} |a_j|$, то уравнение (13) устойчиво при любых значениях запаздываний $\tau_1,...,\tau_m$. Если $a_0 < \sum_{j=1}^{m} |a_j|$, то для устойчивости уравнения (13) достаточно выполнения неравенства

$$\max\{\tau_1,...,\tau_m\} < \frac{2}{\sqrt{(a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j)(\sum_{j=1}^{m} |a_j| - a_0)}} \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} |a_j| - a_0}{a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j}}. \quad (14)$$

Замечание 1. Неравенство (14) является достаточным для устойчивости уравнения (13), как в случае $\sum_{j=1}^{m} a_j \neq 0$, так и в случае $\sum_{j=1}^{m} a_j = 0$.

Замечание 2. При $m = 1$ неравенство (14) является также и необходимым для устойчивости уравнения (13).

Таким образом, в настоящей статье предложен новый метод получения достаточных условий устойчивости простейших квазиполиномов. Этот метод основан на замене исходного квазиполинома некоторым возмущенным, для которого проще найти необходимые и достаточные условия робастной устойчивости. Эти условия оказываются достаточными для устойчивости исходного квазиполинома.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР, Сер. мат. – 1942. – Т.6. – С. 115 - 134.
2. Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса - Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1949. – Т.26. – С. 3 - 31.
3. Stepan F.Stability charts for linear functional-differential equations // Diff. Eq. – Szeged, 1984. – Vol. 47. – P.1049 - 1057.
4. Barmish B.R., Shi Z. A simple test for robust stability of delay systems // Ibid. – 1988. – P.92 - 97.
5. Дмитришин Д.В. Условия робастной устойчивости линейных управляемых систем // Холод. техника и технология. – Одесса: ОГАХ, 2000. – Вып. 68. – С. 56 - 64.

Поступила в редколлегию 14.03.2001