

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СКАЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

к.ф.-м.н. Д.В. Дмитришин, д.т.н. В.М. Вартамян, к.ф.-м.н. Г.М. Вартамян

Получены эффективно проверяемые достаточные условия устойчивости скалярного дифференциально - разностного уравнения на основе загрузки его параметров.

Устойчивость системы линейных дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) - \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{x}(t - \tau_j),$$

где \mathbf{x} - n -мерный вектор; $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ - постоянные $(n \times n)$ - матрицы, τ_1, \dots, τ_m - положительные величины, называемые запаздываниями, характеризуется принадлежностью открытой левой полуплоскости всех нулей характеристического квазиполинома

$$f(\lambda) = \det \left(\lambda \mathbf{E} + \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j \cdot e^{-\lambda \tau_j} \right).$$

Квазиполиномы с таким расположением нулей называются устойчивыми. Алгебраические критерии устойчивости квазиполиномов известны [1-3]. Однако, необходимые и достаточные условия устойчивости в терминах коэффициентов и запаздываний, аналогичные критерию Рауса-Гурвица для полиномов, пока не получены. Вследствие этого, актуальной является задача поиска простых достаточных коэффициентных условий устойчивости квазиполиномов. В настоящей статье рассматривается случай одного уравнения, характеристический квазиполином которого записывается в виде

$$f(\lambda) = \lambda + a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \cdot e^{-\lambda \tau_j}, \quad (1)$$

где a_0, a_1, \dots, a_m - некоторые константы.

Положим $\mathbf{k} = \sum_{j=1}^m a_j$ (считаем $\sum_{j=1}^m a_j \neq 0$), $L = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \cdot \sum_{j=1}^m |a_j|$,

$\tau = \max \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$. Случай $\sum_{j=1}^m a_j = 0$ рассмотрим позже. Введем семейство квазиполиномов

$$\left\{ f(\lambda) = \lambda + a_0 + k \int_0^1 e^{-\lambda \tau \sigma} d g(\sigma) \mid g(\sigma) \in G \right\}, \quad (2)$$

где $G = \left\{ g(\sigma) \in BV([0,1]) \mid \int_0^1 d g(\sigma) = 1, \int_0^1 |d g(\sigma)| \leq L \right\}$, $BV([0,1])$ - пространство функций ограниченной вариации на $[0,1]$. Интегралы понимаются в смысле Лебега – Стильеса. Очевидно, что квазиполином (1) содержится в семействе (2).

Получим необходимые и достаточные условия устойчивости всех квазиполиномов семейства (2), которые, очевидно, будут достаточными для устойчивости квазиполинома (1).

Представим семейство квазиполиномов (2) в виде

$$\left\{ k \cdot \left(\frac{\lambda}{k} + (1+C) - \int_0^1 (1 - e^{-i\lambda \tau \sigma}) d g(\sigma) \right) \mid g(\sigma) \in G \right\},$$

где $C = a_0 / k$, и применим к этому семейству принцип исключения нуля [4]. Получим следующее утверждение.

Лемма 1. Все квазиполиномы семейства (2) устойчивы в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

1) квазиполином

$$f(\lambda) = \lambda + a_0 + k e^{-\lambda \tau} \quad (3)$$

устойчив;

2) для всех $\varphi \geq 0$ множество

$$\mathfrak{R}(\varphi) = \left\{ z = \int_0^1 (1 - e^{-i\varphi \sigma}) d g(\sigma) \mid g(\sigma) \in G \right\}$$

не содержит точки $z_0(\varphi) = 1 + C + \frac{i\varphi}{k\tau}$.

Анализ устойчивости квазиполинома (3) показывает, что, во - первых, условие $a_0 + k > 0$ — необходимо для устойчивости квазиполиномов семейства (2), во - вторых, существует критическое значение запаздывания τ_0 , характеризующееся тем, что при $\tau \in [0, \tau_0)$ квазиполиномы семейства (2) устойчивы, а при $\tau \geq \tau_0$ в этом семействе обязательно имеются неустойчивые квазиполиномы. При этом из условия 1) леммы следует, что

$$\tau_0 \leq \frac{2}{\sqrt{k^2 - a_0^2}} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{k - a_0}{k + a_0}}.$$

Для нахождения τ_0 изучим множество $\mathfrak{R}(\varphi)$. Уравнения границ этого множества найдены в [5] (рис.1).

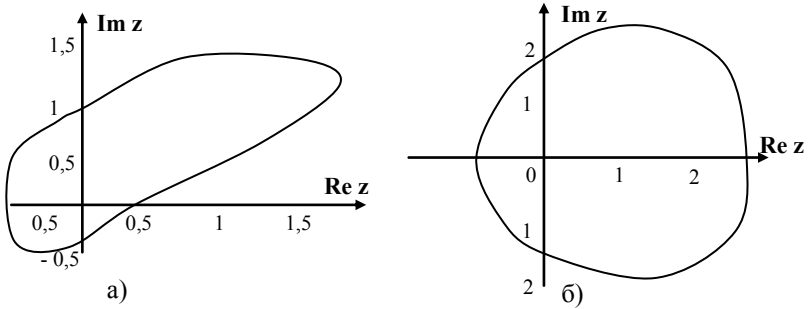


Рис. 1. Область $\mathfrak{R}(\varphi)$: а) при $\varphi \in [0, \pi]$; б) при $\varphi \in [\pi, 2\pi]$

Для $\varphi \in [0, \pi]$ границу $\mathfrak{R}(\varphi)$ можно представить как объединение шести кривых:

$$l_1 = \left\{ z = \frac{L+1}{2} (1 - e^{-i\varphi t_1}) \mid t_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\};$$

$$l_2 = \left\{ z = -\frac{L-1}{2} (1 - e^{-i\varphi}) + \frac{L+1}{2} (1 - e^{-i\varphi t_2}) \mid t_2 \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\};$$

$$l_3 = \left\{ z = -(1 - t_3) \frac{L-1}{2} (1 - e^{-i\varphi}) + \frac{L+1}{2} (1 - e^{-i\frac{\varphi}{2}}) \mid t_3 \in [0, 1] \right\};$$

$$l_4 = \left\{ z = -\frac{L-1}{2} (1 - e^{-i\varphi t_4}) \mid t_4 \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\};$$

$$l_5 = \left\{ z = \frac{L+1}{2} (1 - e^{-i\varphi}) - \frac{L-1}{2} (1 - e^{-i\varphi t_5}) \mid t_5 \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\};$$

$$l_6 = \left\{ z = (1 - t_6) \frac{L+1}{2} (1 - e^{-i\varphi}) - \frac{L-1}{2} (1 - e^{-i\frac{\varphi}{2}}) \mid t_6 \in [0, 1] \right\}.$$

Введем функцию $F(\varphi) = \sup \left(\operatorname{Im} \left\{ \int_0^1 (1 - e^{-i\varphi \sigma}) d\mathfrak{g}(\sigma) \right\} \right)$, где \sup берется

по всем $\mathbf{g}(\sigma) \in \mathbf{G}$, удовлетворяющим равенству $\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 (1 - e^{-i\varphi\sigma}) d\mathbf{g}(\sigma) \right\} = 1 + C$.

Для записи функции $\mathbf{F}(\varphi)$ в аналитической форме достаточно ограничиться рассмотрением кривых l_1, l_2, l_3 при $1 + C > 0$ и l_4, l_5, l_6 при $1 + C < 0$. Пусть $C > -1$. Найдем значения параметров t_1, t_2, t_3 , при которых кривые l_1, l_2, l_3 пересекаются с лучом $\{z \mid \operatorname{Re} z = 1 + C, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. При этом считаем, что $C \leq L$. В противном случае, множество $\mathfrak{R}(\varphi)$ не имеет общих точек с лучом.

Пусть t_0 - решение уравнения

$$\frac{L+1}{2}(1 - \cos \varphi t) = 1 + C. \quad (4)$$

Тогда $\mathbf{F}(\varphi) = \frac{L+1}{2} \sin \varphi t_0 = (1 + C) \operatorname{ctg} \frac{\varphi t_0}{2}$. Так как

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi t_0}{2} = \sqrt{\frac{(L+1) - (1+C)}{1+C}} = \sqrt{\frac{L-C}{1+C}}, \text{ то окончательно получаем}$$

$$\mathbf{F}(\varphi) = \sqrt{(1+C)(L-C)}. \quad (5)$$

Аналитическое выражение (5) верно для $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, где значения

$$\varphi_0 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L-C}{1+C}}, \quad \varphi_1 = 2\varphi_0 \quad (6)$$

получаются в результате подстановки $t = 1$ и $t = 1/2$ в (4).

Рассмотрим теперь уравнение

$$-(1-t) \frac{L-1}{2} (1 - \cos \varphi) + \frac{L+1}{2} (1 - \cos \frac{\varphi}{2}) = 1 + C,$$

из которого получаем

$$1-t = \frac{(L+1) \sin^2 \frac{\varphi}{4} - (1+C)}{(L-1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\varphi) &= - \frac{(L+1) \sin^2 \frac{\varphi}{4} - (1+C)}{(L-1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{L-1}{2} \cdot \sin \varphi + \frac{L+1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{L-C}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} + \frac{1+C}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{4}. \end{aligned}$$

Полагая $t = 0$, найдем правую границу изменения φ :

$$\varphi_2 = 4 \arcsin \sqrt{S}, \quad S = \frac{(3L-5) + \sqrt{(3L-5)^2 + 16(L-1)(1+C)}}{8(L-1)}. \quad (7)$$

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$-\frac{L-1}{2}(1 - \cos \varphi) + \frac{L+1}{2}(1 - \cos \varphi t) = 1 + C.$$

Так как $F(\varphi) = -\frac{L-1}{2} \sin \varphi + \frac{L+1}{2} \sin \varphi t$, то, исключая t , получим

$$F(\varphi) = -\frac{L-1}{2} \sin \varphi + \sqrt{(1+C) + (L-1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \sqrt{(L-C) + (L-1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Правую границу изменения аргумента определим из условия пересечения окружности $(\operatorname{Re} z - 1)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = L^2$ и луча $\{z \mid \operatorname{Re} z = 1 + C, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Следовательно, $F(\varphi_3) = \sqrt{L^2 - C^2}$. Разрешая это уравнение относительно φ_3 , получим

$$\varphi_3 = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{C}{\sqrt{L^2 - C^2}}. \quad (8)$$

Выпишем окончательный вид функции $F(\varphi)$ при $C \in (-1, L)$:

$$F(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{(C+1)(L-C)}, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1; \\ \frac{1+C}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{4} + \frac{L-C}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}, & \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2; \\ -\frac{L-1}{2} \sin \varphi + \sqrt{1+C + (L-1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \sqrt{L-C + (L-1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, & \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3, \end{cases}$$

где величины $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ определяются формулами (6), (7), (8).

Если $C \in (-L, -1)$, то рассматривая кривые I_4, I_5, I_6 и проводя аналогичные преобразования, получим:

$$F(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{-(1+C)(L+C)}, & 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L+C}{-(1+C)}} \leq \varphi \leq 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L+C}{-(1+C)}}; \\ -\frac{1+C}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{4} + \frac{L+C}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}, & 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L+C}{-(1+C)}} \leq \varphi \leq 4 \arcsin \sqrt{S_1}; \\ -\frac{L+1}{2} \sin \varphi + \sqrt{-(1+C) + (L+1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{(L+C) - (L+1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, & 4 \arcsin \sqrt{S_1} \leq \varphi \leq 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{-C}{\sqrt{L^2 - C^2}}. \end{cases}$$

$$\text{где } S_1 = \frac{3L+5+\sqrt{(3L+5)^2-16(C+1)(L+1)}}{8(L+1)}.$$

Ясно, что точка $z_0 = 1+C + \frac{i\varphi}{k\tau}$ ($C \in (-L, L)$, $C \neq -1$) будет находиться вне множества $\mathfrak{R}(\varphi)$, если выполняется неравенство

$$\frac{\varphi}{|k| \cdot \tau} > F(\varphi) \quad (9)$$

для всех $\varphi \geq \varphi_0 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L+C}{|1+C|}}$. Анализ графика функции $F(\varphi)$ позволяет заметить, что, если

$$\frac{\varphi_0}{|k| \cdot \tau} > F(\varphi_0), \quad (10)$$

то и для всех $\varphi \geq \varphi_0$ неравенство (9) выполнено.

Выписывая явный вид неравенства (10), приходим к утверждению.

Лемма 2. Пусть $a_0 + k > 0$ и $a_0 < |k| \cdot L$. Тогда необходимым и достаточным условием устойчивости всех квазиполиномов семейства (2) служит неравенство

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{(L + \frac{a_0}{k})(a_0 + k) \cdot |k|}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(L + \frac{a_0}{k}) \cdot |k|}{a_0 + k}}. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь случай $\sum_{j=1}^m a_j = 0$. Положим $L = \sum_{j=1}^m |a_j|$. В этом случае, вместо дуг I_1, \dots, I_6 следует рассматривать дуги, уравнения которых получаются из уравнений для дуг I_1, \dots, I_6 в результате замены величин $\frac{L-1}{2}$, $\frac{L+1}{2}$ на $\frac{L}{2}$. Аналогом неравенства (11) является

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{a_0(L-a_0)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L-a_0}{a_0}}. \quad (12)$$

Неравенства (11), (12) позволяют сформулировать достаточные условия устойчивости уравнения

$$\dot{x}(t) = -a_0 x(t) - \sum_{j=1}^m a_j x(t - \tau_j). \quad (13)$$

Теорема. Пусть $a_0 + \sum_{j=1}^m a_j > 0$. Если $a_0 > \sum_{j=1}^m |a_j|$, то уравнение (13)

устойчиво при любых значениях запаздываний τ_1, \dots, τ_m . Если

$a_0 < \sum_{j=1}^m |a_j|$, то для устойчивости уравнения (13) достаточно выполнения

неравенства

$$\max\{\tau_1, \dots, \tau_m\} < \frac{2}{\sqrt{(a_0 + \sum_{j=1}^m a_j)(\sum_{j=1}^m |a_j| - a_0)}} \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m |a_j| - a_0}}{\sqrt{a_0 + \sum_{j=1}^m a_j}}. \quad (14)$$

Замечание 1. Неравенство (14) является достаточным для устойчивости уравнения (13), как в случае $\sum_{j=1}^m a_j \neq 0$, так и в случае $\sum_{j=1}^m a_j = 0$.

Замечание 2. При $m = 1$ неравенство (14) является также и необходимым для устойчивости уравнения (13).

Таким образом, в настоящей статье предложен новый метод получения достаточных условий устойчивости простейших квазиполиномов. Этот метод основан на замене исходного квазиполинома некоторым возмущенным, для которого проще найти необходимые и достаточные условия робастной устойчивости. Эти условия оказываются достаточными для устойчивости исходного квазиполинома.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР, Сер. мат. – 1942. – Т.6. – С. 115 - 134.
2. Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса - Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1949. – Т.26. – С. 3 - 31.
3. Stepan F. Stability charts for linear functional-differential equations // Diff. Eq. – Szeged, 1984. – Vol. 47. – P.1049 - 1057.
4. Barmish B.R., Shi Z. A simple test for robust stability of delay systems // Ibid. – 1988. – P.92 - 97.
5. Дмитришин Д.В. Условия робастной устойчивости линейных управляемых систем // Холод. техника и технология. – Одесса: ОГАХ, 2000. – Вып. 68. – С. 56 - 64.

Поступила в редколлегию 14.03.2001
