УДК 621.327

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЕРИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПОЛИАДИЧЕСКИМИ КОДАМИ

к.т.н. В.В. Баранник, Н.А. Королёва
(представил проф. А.В. Королев)

Излагается вероятностно - статистическая модель компактного представления серий одинаковых элементов изображений полиадическими кодами.

Разработка математической модели необходима для определения дополнительной степени сжатия изображений в результате полиадического кодирования длин серий одинаковых элементов.

Теоретическое решение этой задачи состоит в нахождении средних затрат разрядов $|\mathbf{N}|_{\mathbf{cp}}$ на представление полиадических кодов **N**, сформированных для последовательности серий элементов изображений

$$|\mathbf{N}|_{\mathbf{cp}} = \ell \mathbf{og}_2 \overline{\mathbf{N}},$$

где $\overline{\mathbf{N}}$ - среднее значение полиадического кода последовательности длин серий.

Рассмотрим частный случай, когда полиадические коды формируются для последовательностей длин серий, имеющих следующие свойства.

1. Максимальное значение длины серии ***l*** ограничено величиной $\mathbf{L_{max}}$. Значение $\mathbf{L_{max}}$ выбирается так, чтобы полиадический код последовательности длин серий мог разместиться в машинном слове заданной длины **M**.

2. Количество длин серий в последовательности, для которой формируется общий код, фиксировано и равно $\mathbf{n_{дс}}$.

Из отдельных длин серий образуются массивы **L** равных размеров $\left(\mathbf{L} = \{\ell_{\mathbf{ij}}\}_{\mathbf{i}=\overline{\mathbf{1},\mathbf{n_{дс}}};\ \mathbf{j}=\overline{\mathbf{1},\mathbf{n}}}\right)$. Для массивов, расположенных в конце кадра, не всегда удастся образовать прямоугольный массив. В этом случае недостающие элементы заполняются нулями. Для таких условий полиадическое кодирование задается выражением

$$\mathbf{N_j} = \varphi_{\mathbf{пк}} \{\ell_{\mathbf{ij}}\}_{\mathbf{i}=\overline{\mathbf{1},\mathbf{n_{дс}}}}, \qquad (1)$$

где $\varphi_{\mathbf{пк}}$ - оператор полиадического кодирования [1]; $\ell_{\mathbf{ij}}$ - значение **ij** - й длины серии в последовательности $\mathbf{L^{(j)}} = \{\ell_{\mathbf{1j}}, \ell_{\mathbf{ij}}, \ell_{\mathbf{n_{дс}},\mathbf{j}}\}$.

Для решения поставленной задачи будем использовать вероятностно - статистические методы. Введем случайную величину $\mathbf{N_j}$ - значение полиадического кода последовательности $\mathbf{L^{(j)}}$**.** Тогда оценкой $\overline{\mathbf{N}}$ является математическое ожидание $\mathbf{m_N}$ значения случайной величины $\mathbf{N_j}$.

На основе выражения (1) $\mathbf{N_j}$ является взвешенной суммой случайных величин $\ell_{\mathbf{ij}}$. При этом событие $\ell_{\mathbf{ij}} = \mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ – конкретное значение серии) наступает в результате появления опыта по схеме Бернулли. Поэтому случайные величины $\ell_{\mathbf{ij}}$ $(\mathbf{i} = \overline{\mathbf{1, n_{дс}}})$ – взаимонезависимые.

В силу теоремы о математическом ожидании суммы взаимонезависимых величин [2] получим

$$\mathbf{m_N} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_{дс}}} \mathbf{m}\left[\ell_{\mathbf{ij}}\right] \cdot \mathbf{h_i}\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{m_N}$ - математическое ожидание полиадического кода $\mathbf{N_j}$, вычисленного для последовательности длин серий $\mathbf{L^{(j)}}$; $\mathbf{m}[\boldsymbol{l}_{\mathbf{ij}}]$ - математическое ожидание величины $\boldsymbol{l}_{\mathbf{ij}}$; $\mathbf{h_i}$ - весовой коэффициент последовательности $\mathbf{L^{(j)}}$.

Поскольку максимальное значение длин серий ограничено величиной $\mathbf{L_{max}}$, то математическое ожидание $\mathbf{m}\left[\ell_{\mathbf{ij}}\right]$ равно [3]:

$$\mathbf{m}\left[\ell_{\mathbf{ij}}\right] = \frac{\mathbf{1 - q^{L_{max}}}}{\mathbf{p}}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{q = 1 - p}$ – вероятность отсутствия перепада цветовой координаты.

В связи с тем, что процесс формирования длин серий является локально стационарным [2], то $\mathbf{m}\left[\ell_{\mathbf{1j}}\right] = \ldots = \mathbf{m}\left[\ell_{\mathbf{ij}}\right] = \ldots = \mathbf{m}\left[\ell_{\mathbf{n_{дс},j}}\right]$. Тогда с учетом формулы (3) выражение (2) примет вид

$$\mathbf{m_N} = \mathbf{m}\left[\ell_{\mathbf{ij}}\right] \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_{дс}}} \mathbf{h_i} = \frac{\mathbf{1 - q^{L_{max}}}}{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_{дс}}} \mathbf{h_i}\,. \tag{4}$$

Весовые коэффициенты $\mathbf{h_i}$ формируются как накопленное произведение оснований полиадических чисел λ_ξ:

$$\mathbf{h_i} = \prod_{\xi = \mathbf{i+1}}^{\mathbf{n_{дс}}} \lambda_\xi\,,\ \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1, n_{дс}}}\,. \tag{5}$$

Ввиду того, что последовательность $\left\{\mathbf{h_i}\right\}_{\mathbf{i} = \overline{\mathbf{1, n_{дс}}}}$ одинакова для всех $\mathbf{L^{(j)}}$ в пределах одного блока, то коэффициент $\mathbf{h_i}$ в (2) будем рассматривать, как числовую характеристику случайной величины $\mathbf{H_i}$ (случайный исход произведения (5)). Такой характеристикой является математическое ожидание $\mathbf{m[H_i]}$. Рассмотрим случайную величину $\boldsymbol{\lambda_i}$ - максимальное значение величины l_{ij}, увеличенное на единицу. Из независимости величин $\left\{\ell_{ij}\right\}_{i=\overline{1,n_{дс}}}$ следует взаимонезависимость $\left\{\lambda_i\right\}_{i=\overline{1,n_{дс}}}$.

Для взаимонезависимых величин математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий этих величин

$$m[H_i]=\prod_{\xi=i+1}^{n_{дс}} m[\lambda_\xi], \tag{6}$$

где $m[\lambda_\xi]$ - математическое ожидание максимального значения для случайных величин l_{ij} в ξ - й строке.

Для нахождения математического ожидания $m[\lambda_\xi]$ необходимо знать плотность распределения $P(\lambda_\xi = u)$ вероятностей случайной величины λ_ξ ($\lambda_\xi = u$ – событие, состоящее в том, что случайная величина λ_ξ будет равна u). Получим сначала выражение для функции распределения $F(\lambda_\xi \leq u)$. Запишем выражение для λ_ξ:

$$\lambda_\xi = \max_{1<j<n}\left\{\ell_{\xi j}\right\}+1,$$

где n – количество длин серий в ξ –й строке.

Поскольку величины $\ell_{\xi j}$ взаимонезависимы, то событие $\lambda_\xi > u$ наступит при появлении ряда событий

$$\ell_{\xi 1} > u, \ldots, \ell_{\xi j} > u, \ldots, \ell_{\xi n} > u. \tag{7}$$

С учетом (7) $F(\lambda_\xi > u)$ равна

$$F(\lambda_\xi > u) = \prod_{j=1}^{n} F(\ell_{\xi j} > u) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - F(\ell_{\xi j} \leq u)\right), \tag{8}$$

Для серий с ограниченной длиной функция геометрического распределения $F(\ell_{\xi j} \leq u)$ будет равна

$$F(\ell_{\xi j} \leq u) = \begin{cases} 1-(1-p)^u, & \text{если } u < L_{max}; \\ 1, & \text{если } u = L_{max}. \end{cases} \tag{9}$$

На основе (9) выражение для функции $F(\lambda_\xi \leq u)$ примет вид

$$F(\lambda_\xi \leq u) = \prod_{j=1}^{n} F(\ell_{\xi j} \leq u).$$

С учетом локальной стационарности процесса формирования длин серий

$$F(\lambda_\xi \leq u) = \left(F(\ell_{\xi j} \leq u)\right)^n.$$

Тогда плотность распределения $P(\lambda_\xi = u)$ случайной величины λ_ξ равна

$$P(\lambda_\xi = u) = \left(F(\ell_{\xi j} \leq u)\right)^n - \left(F(\ell_{\xi j} \leq u-1)\right)^n. \tag{10}$$

Для заданной по формуле (10) плотности $\mathbf{P[\lambda_\xi=u]}$ найдем математическое ожидание $\mathbf{m}\left[\lambda_\xi\right]$:

$$\mathbf{m}\left[\lambda_\xi\right]=\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{L_{max}}}\mathbf{u\,P}\left(\lambda_\xi=\mathbf{u}\right). \qquad (11)$$

Подставляя выражения (6), (10) и (11) в формулу (4), получим (математическое ожидание $\mathbf{m_N}$ полиадического кода длин серий):

$$\begin{aligned}\mathbf{m_N}&=\frac{\mathbf{1-q^{L_{max}}}}{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_{дс}}}\prod_{\xi=\mathbf{i+1}}^{\mathbf{n_{дс}}}\left(\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{L_{max}}}\mathbf{u\,P}\left(\lambda_\xi=\mathbf{u}\right)\right)=\\&=\frac{\mathbf{1-q^{L_{max}}}}{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_{дс}}}\prod_{\xi=\mathbf{i+1}}^{\mathbf{n_{дс}}}\left(\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{L_{max}}}\mathbf{u}\left(\left(\mathbf{F}\left(\ell_{\xi\mathbf{j}}\le\mathbf{u}\right)\right)^{\mathbf{n}}-\left(\mathbf{F}\left(\ell_{\xi\mathbf{j}}\le\mathbf{u-1}\right)\right)^{\mathbf{n}}\right)\right).\end{aligned} \qquad (12)$$

В результате подстановки в (12) выражения (9) для функции распределения $\mathbf{F}\left(\lambda_\xi\le\mathbf{u}\right)$ длин серий, получим

$$\mathbf{m_N}=\frac{\mathbf{1-q^{L_{max}}}}{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_{дс}}}\prod_{\xi=\mathbf{i+1}}^{\mathbf{n_{дс}}}\left(\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{L_{max}}}\mathbf{u}\times\begin{cases}\mathbf{(1-p)^{u-1}-(1-p)^{u}}, & \mathbf{если\ u<L_{max}}\\ \mathbf{(1-p)^{u}}, & \mathbf{если\ u=L_{max}}\end{cases}\right). \qquad (13)$$

Таким образом, в случае формирования длин серий по схеме Бернулли в условиях локальной стационарности выражение (13) позволяет вычислить математическое ожидание полиадического кода последовательности длин серий для заданных вероятности цветового перепада $\mathbf{p}$, максимальной длины серии $\mathbf{L_{max}}$ и количества длин серий $\mathbf{n_{дс}}$.

Интерес представляет выражение

$$\bar{\ell}=\frac{\ell\mathbf{og_2\,m_N}}{\mathbf{n_{дс}}}, \qquad (14)$$

где $\bar{\ell}$ - среднее количество разрядов, приходящееся на одну серию элементов в случае полиадического кодирования.

Выражение (14) позволяет определить средние затраты разрядов $\overline{\left|\mathbf{N}\right|}_{\mathbf{ср}}$.

Определим эффективность полиадического кодирования длин серий на основе сравнения средних затрат разрядов на одну длину серии для разных методов сжатия. На рис. 1 показаны графики зависимостей затрат разрядов на одну серию для полиадического кодирования их длин $\bar{\ell}$ и поэлементного статистического кодирования $\bar{\ell}_{\mathbf{дс}}$ ($\bar{\ell}_{\mathbf{дс}}=\ell\mathbf{og_2\,m}\left[\ell_{\mathbf{ij}}\right]$).

Замечание. Построение графиков на рис. 1 проводилось для значений $\mathbf{L_{max}=16}$ и $\mathbf{n_{дс}=8}$.

При этом вероятностям цветового перепада для $\mathbf{0.01\le p<0.1}$ соответствуют изображения типа "Мнемосхема"; $\mathbf{0.1 \le p \le 0.2}$ - изображения типа "Портрет"; $\mathbf{p > 0.2}$ - изображения типа "Фото с ИСЗ".

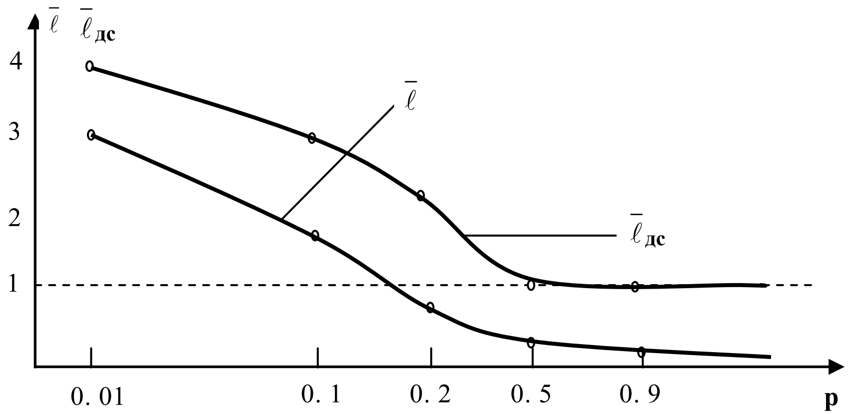

Рис. 1. Графики зависимости величин $\bar{\ell}$ и $\bar{\ell}_{дс}$ от **p**

Из анализа представленных на рис. 1 графиков следует, что полиадическое кодирование длин серий позволяет дополнительно увеличить сжатие данных в среднем в **2** раза для вероятности цветового перепада $\mathbf{p \le 0.1}$ и в среднем в **15** раз для $\mathbf{p \ge 0.2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королева Н.А. Баранник В.В. Адаптивная упаковка преобразованных изображений побуквенным кодированием мультиадических чисел // ИУСЖТ. – 1999. – № 2. – С. 45 - 50.

2. Смирнов Н. В., Дунин - Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – 790 с.

Поступила в редколлегию 26.03.2001