

УДК 004.7 : 51

И.В. Гребенник, В.Г. Иванов, Д.В. Иванов, И.А. Урняева

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПЕРЕДАЧИ ФАЙЛА ОТ НЕСКОЛЬКИХ ИСТОЧНИКОВ ПОТРЕБИТЕЛЮ

*Рассматривается проблема передачи файлов больших размеров по сети передачи данных. Анализируются случаи, когда несколько точных копий файла находятся одновременно в разных доступных хранилищах в территориально распределенной сети. Возникает задача передачи файла по частям от нескольких источников потребителю в параллельном режиме за минимальное время. Строится математическая модель задачи, анализируются ее особенности, проводится вычислительный эксперимент.*

**Ключевые слова:** сеть передачи данных, время передачи, оптимизация, скорость передачи, пропускная способность канала.

### Введение

Современные информационные системы оперируют огромными объемами данных, хранение которых невозможно в одном месте. В то же время при распределенной организации хранилищ информации часто возникает ситуация дублирования данных. Файлы, передаваемые между пользователями при распределенном хранении, как правило, подразделяют на файлы, имеющие точную копию, и файлы, не имеющие точной копии. В случае, когда файлы, имеющие точную копию, находятся одновременно в нескольких доступных хранилищах, имеется возможность организовать кооперативный обмен данными между источниками и потребителем информации [1]. При этом файлы передаются частями, из разных хранилищ. Это снижает нагрузку и зависимость от каждого клиента-источника и обеспечивает избыточность данных. Важно, что каждый файл, который передается в таких сетях, делится на относительно небольшие части (пакеты), которые могут скачиваться от разных клиентов и в любой последовательности [2].

В свою очередь, полученные части могут отдаваться другим клиентам. Обычно скорость отдачи не очень велика, а иногда просто ограничена, несмотря на то, что используются высокоскоростные каналы. Подобная организация обмена данными приводит к тому, что передача файла данных большого размера сводится к передаче десятков или иногда сотен фрагментов, получаемых из разных источников.

Такой метод передачи файлов в сети реализуют современные менеджеры закачек, которые оснащены многими полезными функциями [3]. Среди функций менеджера закачек основными являются: возобновление загрузки файла после различных остановок, выключения программы и перезагрузки компьютера; загрузка одного и того же файла в не-

сколько потоков; встроенный планировщик для загрузки файлов по расписанию. При этом функция обоснованного с точки зрения эффективности выбора одного или нескольких источников и объемов скачиваемых от них данных в менеджерах закачек отсутствует и в лучшем случае решение этой задачи возлагается на пользователя.

Однако часто возникает ситуация, когда время загрузки файла определяется временем отдачи фрагмента файла от самого медленного источника, в то время как остальные части файла уже находятся у потребителя. Это связано с тем, что на серверах-хранилищах данных обычно введено ограничение по скорости отдачи. Кроме того, на разные каналы связи по-разному распределяется нагрузка в процессе скачивания.

Таким образом, время получения требуемого объема данных в значительной степени зависит от того, в каком количестве и от каких источников будет получена информация.

Проблема выбора источников данных и расчет объемов получаемой от каждого из них информации включает в себя несколько задач. Среди них:

1. Мониторинг состояния сети передачи данных.
2. Планирование объемов данных, получаемых от каждого источника, перед началом передачи.
3. Перераспределение объемов данных и источников динамически в зависимости от состояния сети, в том числе, исключение «медленных» источников данных и перераспределение их объемов на другие источники.

В настоящей статье рассматривается вторая задача, в предположении, что задача мониторинга состояния сети передачи данных решена.

**Целью работы** является построение и анализ математической модели задачи эффективного планирования передачи файла большого объема от нескольких источников потребителю.

## 1. Постановка задачи

Пусть задано множество узлов сети передачи данных, в каждом из которых находится идентичная копия файла данных большого размера. Задан узел сети (потребитель), в который необходимо передать указанный файл полностью от одного источника или по частям от нескольких источников. Определены маршруты от каждого источника к потребителю и соответствующие характеристики процесса передачи данных – скорости, пропускные способности, размеры пакетов.

Необходимо определить, какой объем данных (какую часть файла) от какого источника следует передать потребителю, чтобы время передачи всего файла было минимальным.

## 2. Математическая модель

Построим математическую модель задачи. Введем следующие обозначения:

$n$  – количество источников данных;

$V_i^{\max}$  – максимальная скорость отдачи  $i$ -го источника данных, бит/с,  $i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ;

$V_i$  – доступная скорость отдачи  $i$ -го источника данных, бит/с,  $i \in J_n$ ,  $V_i \leq V_i^{\max}$ ;

$C_i$  – пропускная способность  $i$ -го канала связи между источником и потребителем, бит/с; под каналом связи далее будем понимать множество дуг сети, составляющих маршрут от источника к потребителю, а под его пропускной способностью – наименьшую из пропускных способностей дуг маршрута;

$D$  – объем всего файла данных в пакетах;

$d$  – размер одного пакета, бит;

$w_i$  – объем данных, получаемых от  $i$ -го источника данных, пакетов,  $i \in J_n$ ;

$T_i$  – время закачки данных объемом  $w_i$  от  $i$ -го источника, с,  $i \in J_n$ ;

$T$  – время закачки всего файла данных, с.

Соответствующие характеристики источников данных и каналов представим в виде векторов:

$$V^{\max} = (V_1^{\max}, V_2^{\max}, \dots, V_n^{\max});$$

$$V = (V_1, V_2, \dots, V_n);$$

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_n);$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n).$$

Отметим, что время  $T$  закачки всего файла данных, с одной стороны, зависит от размера файла  $D$ , размера пакета  $d$ , количества источников данных и каналов  $n$ , их доступных скоростей отдачи и пропускных способностей  $V_i$  и  $C_i$ , объемов данных, получаемых от  $i$ -го источника  $w_i$ ,  $i \in J_n$ , т.е.,  $T = T(D, d, n, V, C, w)$ .

С другой стороны, время  $T$  закачки всего файла определяется максимальным временем данных от источников, т.е.,  $T = \max_{1 \leq i \leq n} T_i$ .

Значения переменных  $w_i$ ,  $i \in J_n$ , представляют собой целые неотрицательные числа.

При этом должно быть выполнено условие:

$$\sum_{i=1}^n w_i = D.$$

Поскольку каждому источнику данных соответствует канал, соединяющий его с потребителем, скорость передачи данных от каждого источника к потребителю будет определяться минимальным значением из доступной скорости отдачи  $i$ -го источника данных и пропускной способности  $i$ -го канала связи. Введем величины

$$S_i = \min\{V_i, C_i\}, \quad i \in J_n.$$

Время  $T_i$  закачки данных объемом  $w_i$  от  $i$ -го источника может быть рассчитано исходя из характеристик источника данных и канала:

$$T_i = \frac{w_i \cdot d}{\min\{C_i, V_i\}} = \frac{w_i \cdot d}{S_i}, \quad i \in J_n.$$

Таким образом, математическую модель задачи можно представить в следующем виде:

$$T = \left[ \max_{1 \leq i \leq n} T_i \right] \rightarrow \min_w; \quad (1)$$

$$T_i = w_i \cdot d / S_i, \quad i \in J_n; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = D; \quad (3)$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n); \quad w_i \geq 0; \quad w_i \in Z; \quad i \in J_n. \quad (4)$$

С целью ухода от трудностей решения минимаксной задачи оптимизации (1)–(4) выполним ее преобразование.

Будем исходить из того, что, минимизируя максимальное из значений  $T_i$ , мы стремимся сделать все значения  $T_i$  близкими друг к другу и, значит, к некоторому идеализированному  $\bar{T}$ .

Значение  $\bar{T}$  соответствует минимально возможному времени передачи файла объемом  $D$  по каналу связи со скоростью, равной сумме доступных скоростей передачи всех  $n$  каналов:

$$\bar{T} = D \cdot d / \sum_{i=1}^n S_i. \quad (5)$$

Тогда новая функция цели задачи оптимизации может иметь вид суммы квадратов отклонений значений  $T_i$  – времени закачки данных от  $i$ -го источника – от идеализированного значения  $\bar{T}$ , рассчитанного по формуле (5).

Преобразованную математическую модель сформулированной задачи представим в виде:

$$F(w) = \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 \rightarrow \min_w; \quad (6)$$

$$T_i = \frac{w_i \cdot d}{S_i}; \quad i \in J_n; \quad \bar{T} = D \cdot d / \sum_{i=1}^n S_i; \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = D; \quad (8)$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n); \quad w_i \geq 0; \quad w_i \in Z; \quad i \in J_n. \quad (9)$$

### 3. Анализ математической модели

Задача (6) – (9) представляет собой задачу целочисленного квадратичного программирования [4, 5]. Она может быть решена с применением известных подходов [5]. Однако, специфика задачи позволяет использовать для ее решения более простые средства.

Функция цели  $F(w)$  является выпуклой, задача имеет одно ограничение-равенство.

Выразим переменную  $w_n$  из соотношения (8) и подставим ее в функцию цели:

$$w_n = D - \sum_{i=1}^{n-1} w_i,$$

$$F(w) = \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{w_i \cdot d}{S_i} - \bar{T} \right)^2 + \left( d \cdot \left( D - \sum_{i=1}^{n-1} w_i \right) / S_n - \bar{T} \right)^2. \quad (10)$$

Тогда задача (6) – (9) преобразуется в задачу целочисленного квадратичного программирования без дополнительных ограничений в пространстве переменных  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ .

Для планирования передачи файла большого объема нет необходимости в поиске точного решения задачи оптимизации (6)–(9), главным образом, в силу высокой динамики загрузки сети в целом и изменении я во времени доступных скоростей отдачи выбранных источников данных.

Поэтому в качестве решения задачи предлагается следующее.

Значения переменных в точке решения выберем из условия пропорциональности значений объемов передаваемых от каждого источника данных  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$  значениям параметров доступной скорости передачи  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ :

$$w_1 : w_2 : \dots : w_{n-1} = S_1 : S_2 : \dots : S_{n-1}.$$

Тогда

$$\bar{w}_i = \left( S_i / \sum_{j=1}^n S_j \right) \cdot D, \quad i \in J_{n-1}, \quad (11)$$

$$\bar{w}_n = D - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{w}_i - \quad (12)$$

начальная (нецелочисленная) точка поиска решения преобразованной задачи оптимизации. Для получения решения задачи – точки  $(w_1^0, w_2^0, \dots, w_n^0)$  – проанализируем окрестность начальной точки поиска  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{n-1})$ .

Вычислим значения функции цели (10) в узлах целочисленной решетки, соседних с начальной точкой поиска. Точку окрестности с целочисленными координатами и наименьшим значением выражения (10) примем в качестве решения задачи – точки  $w^0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_n^0)$ .

### 4. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим сеть передачи данных, в которой имеется пять узлов, содержащих идентичные копии файла размером  $D = 22000000$  пакетов, размер одного пакета составляет 12208 бит. Характеристики источников и соответствующих каналов связи заданы в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики источников и каналов связи, Мбит/с

$V_i$	30	8	25	40	8
$C_i$	100	10	100	10	100
$S_i$	30	8	25	40	8

Используя соотношения (11)–(12), определим начальную точку поиска

$$\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n) = (5945945.946, 1585585.586, 4954954.955, 7927927.928, 1585585.586).$$

Значение  $\bar{T}$ , вычисленное по формуле (5), составляет 2378.378 с.

Далее построим 32 целочисленных вектора переменных  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  в окрестности точки  $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n)$  путем округления значений  $\bar{w}_i$  по недостатку и по избытку.

Для каждого вектора рассчитаем значение целевой функции (10). Минимальное значение функции соответствует вектору

$$w^0 = (5945946, 1585586, 4954955, 7927931, 1585586),$$

что соответствует времени передачи файла

$$T = 2378.379 \text{ с.}$$

Максимальное значение функции соответствует вектору

$$w^0 = (5945945, 1585585, \\ 4954954, 7927927, 1585589),$$

что соответствует времени передачи файла

$$T = 2378.384 \text{ с.}$$

Сравнивая значения  $\bar{T}$  и  $T$ , полученного в результате оптимизации для наибольшего и наименьшего значений целевой функции, можно сделать вывод об их различии в сотых долях секунды.

Это позволяет использовать на практике в качестве  $w^0$  любой точки из 32 построенных в окрестности  $\bar{w}$ .

Увеличение размера пакета приводит к более существенным различиям в значениях времени передачи файла  $T$  для различных векторов  $w$ , что делает оправданным решение задачи оптимизации. Однако, согласно стандартам [2], максимально возможная длина пакета (MaximumTransferUnit, MTU) в сетях передачи данных, работающих под управлением протоколов Ethernet, Fast Ethernet, составляет 12208 бит.

Это обстоятельство определило исходные данные для рассмотренного примера.

Использование пакетов большей длины возможно в сетях специального назначения. В этих случаях применение оптимизации предложенной математической модели является оправданным.

## Выводы

В статье построена математическая модель задачи планирования передачи файла большого объема от нескольких источников потребителю в

виде задачи целочисленного квадратичного программирования с одним ограничением-равенством.

Выполнено преобразование построенной модели к задаче безусловной оптимизации квадратичной функции на множестве целочисленных переменных.

Обоснована приемлемость получения приближенного или эвристического решения задачи для рассматриваемой предметной области.

Предложен способ получения эвристического решения, проведены вычислительные эксперименты, проанализированы их результаты.

Предложенную математическую модель можно использовать в составе математического обеспечения менеджеров закачки. Процедуру оптимизации целесообразно выполнять для специальных классов сетей передачи данных.

## Список литературы

1. Таненбаум Э. Распределенные системы. Принципы и парадигмы / Э. Таненбаум, Ван Стеен М. – СПб.: Питер, 2003. – 877 с.
2. Олифер В.Г. Компьютерные сети. Принципы технологии протоколы / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер. – СПб.: Питер, 2010. – 916 с.
3. Шляхтина С. Сравнительный обзор download-менеджеров / Светлана Шляхтина // КомпьютерПресс. - 2009. – N 7. – С. 38-42
4. Гребенник И.В. Математическая модель задачи передачи данных по сети от нескольких источников потребителю / И.В. Гребенник, В.Г. Иванов, И.А. Урняева // Proc. International Conf. "Problems of decision making under uncertainties", September 1–5, 2014, Cesky Rudolec, Chekh Republic – P. 51.
5. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. – К.: Наук. думка, 1988. – 472 с.

Поступила в редколлегию 17.07.2015

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ПЛАНУВАННЯ ПЕРЕДАЧІ ФАЙЛУ ВІД ДЕКІЛЬКОХ ДЖЕРЕЛ СПОЖИВАЧУ

І. В. Гребеннік, В.Г. Іванов, Д.В. Іванов, І.А. Урняєва

*Розглядається проблема передачі файлів великих розмірів по мережі передачі даних. Аналізується випадок, коли кілька точних копій файлу знаходяться одночасно в різних доступних сховищах в територіально розподіленій мережі. Виникає задача передачі файлу частинами від декількох джерел користувачу в паралельному режимі за мінімальний час. Будується математична модель задачі, аналізуються її особливості, проводиться обчислювальний експеримент.*

**Ключові слова:** мережа передачі даних, час передачі, оптимізація, швидкість передачі, пропускна здатність каналу.

## A MATHEMATICAL MODEL OF THE PROBLEM OF PLANNING A FILE TRANSFER FROM MULTIPLE SOURCES TO THE CONSUMER

I.V. Grebennik, V.G. Ivanov, D.V. Ivanov, I.A. Urniaieva

*The problem of transmission of large files over a data network is considered. The case when multiple replicas of the file are available simultaneously in different repositories in territorially distributed network is analyzed. A problem of file transfer by parts from several sources to the consumer in a parallel mode in minimum time is arisen. Mathematical model of the problem is constructed, its characteristics are analyzed, a computational experiment is carried out.*

**Keywords:** data network, time of transmission, optimization, transfer rate, channel capacity.