УДК 621.396

В.В. Карпенко

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ В УСЛОВИЯХ КОМБИНИРОВАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрена задача управления запасами в предположении, что временной интервал от момента заказа до момента поставки расходуемого ресурса случаен. Предложен метод расчета величины страхового запаса, минимизирующего средний риск, учитывающий затраты при превышении требуемого уровня запаса и потери от его дефицита.

Ключевые слова: *страховой запас, случайная задержка поставки, средний риск, затраты при перерасходе средств, потери от дефицита.*

Введение

Задача управления запасами традиционно решается при следующих предположениях: спрос – случайная величина с известным законом распределения; восполнение израсходованного запаса осуществляется немедленно или через фиксированный временной интервал.

В реальности поставка заказа происходит со случайной задержкой, закон распределения которой не известен, однако может быть восстановлен путем обработки имеющихся статистических данных. Это обстоятельство для предприятий с непрерывным производством навязывает необходимость создания страхового запаса, гарантирующего с заданной надежностью бесперебойную работу без излишнего перерасхода средств.

Понятно, что любой выбор величины страхового запаса сопряжен с потерями. Если уровень запаса мал, то это может привести к остановке производства и утрате возможной прибыли.

Напротив, необоснованно большому запасу соответствует неоправданный расход средств и их «замораживание».

Постановка задачи

Пусть в момент плановой поставки произошел её срыв, и работа предприятия осуществляется за счет потребления страхового запаса. Введем следующие обозначения.

T – случайная продолжительность интервала от момента срыва поставки до момента поставки (сутки);

$f(T)$ – плотность распределения случайной величины T;

$\overline{T} = \int_0^\infty Tf(T)dT$ – средняя продолжительность интервала от момента срыва до поставки (сутки);

n – среднесуточное потребление комплектов выбранной номенклатуры (равно числу изготавливаемых изделий);

Q – величина страхового запаса (число комплектов по каждой номенклатуре);

$T_c = \frac{Q}{n}$ – продолжительность интервала бесперебойной работы, обеспечиваемая страховым запасом (сутки);

C_x – стоимость одного комплекта страхового запаса;

C_o – стоимость одного изготовленного изделия;

T_0 – случайное значение интервала до поставки в текущей реализации процедуры расходования запаса;

$R_n(T_0)$ – случайные потери от перерасхода средств при формировании запаса

$$R_n(T_0) = \begin{cases} C_x(T_c - T_0)n, & T_0 \le T_c, \\ 0, & T_0 > T_c; \end{cases} \quad (1)$$

$R_{деф}(T_0)$ – случайные потери от дефицита за время простоя в течении интервала $T_0 - T_c$

$$R_{деф}(T_0) = \begin{cases} 0, & T_0 \ge T_c, \\ C_o(T_0 - T_c)n, & T_0 < T_c. \end{cases} \quad (2)$$

Основной материал

Определим вероятность того, что продолжительность интервала до момента поставки будет равна T_0:

$$P(T_0) = Вер(T = T_0) = \int_{T_0}^{T_0+1} f(T)dT = \int_{T_0}^{T_0+1} \frac{1}{\overline{\overline{T}}} e^{-\frac{t}{\overline{\overline{T}}}} dT =$$

$$= -\int_{T_0}^{T_0+1} d\left(e^{-\frac{t}{\overline{\overline{T}}}}\right) = -e^{-\frac{t}{\overline{\overline{T}}}}\Bigg|_{T_0}^{T_0+1} = e^{-\frac{T_0}{\overline{\overline{T}}}} - e^{-\frac{T_0+1}{\overline{\overline{T}}}} =$$

$$= e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right). \qquad (3)$$

Теперь, используя (1) – (3), рассчитаем средние потери, соответствующие уровню страхового запаса, обеспечивающего бесперебойную работу в течении интервала T_c.

$$F(T_c) = A(T_c) + B(T_c) = \sum_{T_0=1}^{T_c} R_n(T_0)\cdot P(T_0) +$$

$$+ \sum_{T_0=T_c+1}^{\infty} R_{деф}(T_0)\cdot P(T_0) =$$

$$= \sum_{T_0=1}^{T_c} C_x(T_c - T_0) n e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right) +$$

$$+ \sum_{T_0=T_c+1}^{\infty} C_o(T_0 - T_c) n e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right) = n\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right)\times$$

$$\times\left[C_x \sum_{T_0=1}^{T_c}(T_c - T_0)e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}} + C_o \sum_{T_0=T_c+1}^{\infty}(T_0 - T_c)e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}}\right] =$$

$$= n\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right)\cdot\left[C_x T_c \sum_{T_0=1}^{T_c} e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}} - C_x \sum_{T_0=1}^{T_c} T_0 e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}} +\right.$$

$$+ C_o \sum_{T_0=T_c+1}^{\infty} T_0 e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}} -$$

$$\left. - C_o T_c \sum_{T_0=T_c+1}^{\infty} e^{-\frac{T_0}{\bar{T}}}\right] = n\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right)\left[C_x T_c A_1 - C_x A_2 + C_o B_1 -\right.$$

$$\left. - CoTcB2\right]. \qquad (4)$$

Далее имеем

$$A_1 = \sum_{T_o=1}^{T_c} e^{-\frac{T_o}{\bar{T}}} = \frac{e^{-\frac{1}{\bar{T}}} - e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}}; \qquad 5)$$

$$A_2 = \sum_{T_o=1}^{T_c} T_o e^{-\frac{T_o}{\bar{T}}} = e^{-\frac{1}{\bar{T}}} + 2e^{-\frac{2}{\bar{T}}} + \ldots + T_c e^{-\frac{T_c}{\bar{T}}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\left(1 + 2e^{-\frac{1}{\bar{T}}} + \ldots T_c e^{-\frac{T_c-1}{\bar{T}}}\right) \underset{e^{-\frac{1}{\bar{T}}}=z}{=}$$

$$= z\frac{d}{dz}\left(z + z^2 + \ldots + z^{T_c}\right) = z\frac{d}{dz}\frac{z - z^{T_c+1}}{1-z} =$$

$$= z\frac{\left(1-(T_c+1)z^{T_c}\right)(1-z) + z - z^{T_c+1}}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}\times$$

$$\times\left(1 - T_c z^{T_c} - z^{T_c} - z + T_c z^{T_c+1} + z^{T_c+1} + z - z^{T_c+1}\right) =$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}\left(1 - T_c z^{T_c} - z^{T_c} + T_c z^{T_c+1}\right) =$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}\left(1-(T_c+1)z^{T_c} + T_c z^{T_c+1}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\bar{T}}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right)^2}\left(1-(T_c+1)e^{-\frac{T_c}{\bar{T}}} + T_c e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}\right). \qquad (6)$$

Аналогично этому:

$$B_1 = \sum_{T_o=T_c+1}^{\infty} T_o e^{-\frac{T_o}{\bar{T}}} =$$

$$= (T_c+1)e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}} + (T_c+2)e^{-\frac{T_c+2}{\bar{T}}} + \ldots =$$

$$= T_c\left(e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}} + e^{-\frac{T_c+2}{\bar{T}}} + \ldots\right) +$$

$$+\left(e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}} + 2e^{-\frac{T_c+2}{\bar{T}}} + \ldots\right) + =$$

$$= T_c\frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}} + e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}\left(1 + 2e^{-\frac{1}{\bar{T}}} + \ldots\right) =$$

$$= T_c\frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}} + e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}\left(1 + 2z + 3z^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{T_c e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}} + e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}\frac{d}{dz}\left(z + z^2 + z^3 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{T_c e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}} + e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1-z}\right) =$$

$$= \frac{T_c e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}} + e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}\frac{1}{(1-z)^2} =$$

$$= \frac{T_c e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}} + \frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right)^2}; \qquad (7)$$

$$B_2 = \sum_{T_o=T_c+1}^{\infty} e^{-\frac{T_o}{\bar{T}}} = \frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}}. \qquad (8)$$

Подставляя (5) – (8) в (4), получим

$$F(T_c) = n\left(1-e^{-1/T}\right)\times$$

$$\times\left[C_x T_c\frac{e^{-\frac{1}{\bar{T}}} - e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}} - C_x\frac{e^{-\frac{1}{\bar{T}}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}\right)^2}\times\right.$$

$$\times\left(1-(T_c+1)e^{-\frac{T_c}{\bar{T}}}+T_c e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}\right)+C_o T_c \frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar{T}}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar{T}}}}+$$

$$\left.+C_o\frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})^2}-C_oT_c\frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\right]=ne^{-\frac{1}{\bar T}}\left[C_xT_c\left(1-e^{-\frac{T_c}{\bar T}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{C_x}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\left(1-(T_c+1)e^{-\frac{T_c}{\bar T}}+T_ce^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}\right)+C_o\frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\right]. \qquad (9)$$

Очевидная сложность полученного выражения (9) затрудняет его аналитическое исследование. В связи с этим проведем раздельно анализ составляющих $A(T_c)$ и $B(T_c)$ критерия $F(T_c)$.

$$A(T_c)=n\left(1-e^{-\frac{1}{\bar T}}\right)\left[C_xT_cA_1-C_xA_2\right]=$$

$$=n(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})\left[C_xT_c\frac{e^{-\frac{1}{\bar T}}-e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}-\right.$$

$$\left.-C_x\frac{e^{-\frac{1}{\bar T}}(1-(T_c+1)e^{-\frac{T_c}{\bar T}}+T_ce^{-\frac{T_c+1}{\bar T}})}{(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})^2}\right]=$$

$$=\frac{nC_x}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\left[T_c(e^{-\frac{1}{\bar T}}-e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}})(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})-e^{-\frac{1}{\bar T}}+\right.$$

$$\left.+(T_c+1)e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}-T_ce^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}\right]=$$

$$=\frac{nC_x}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\left[T_ce^{-\frac{1}{\bar T}}-T_ce^{-\frac{2}{\bar T}}-T_ce^{-\frac{Tc+1}{\bar T}}+T_ce^{-\frac{Tc+1}{\bar T}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{1}{\bar T}}+T_ce^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}+e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}-T_ce^{-\frac{T_c+2}{\bar T}}\right]=$$

$$=\frac{nC_x}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\left[T_ce^{-\frac{1}{\bar T}}(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})-e^{-\frac{1}{\bar T}}(1-e^{-\frac{T_c}{\bar T}})\right]=$$

$$=nC_xe^{-\frac{1}{\bar T}}\left[T_c-\frac{1-e^{-\frac{T_c}{\bar T}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\right].$$

Построим графики функционала $A(T_c)$ при фиксированных значениях $\bar T$ ($\bar T1=5$, $\bar T2=10$, $\bar T3=15$) (рис. 1).

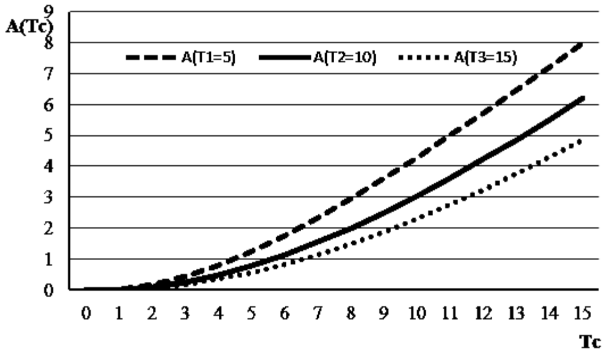

Рис. 1. Зависимости средних потерь при перерасходе средств

Далее

$$B(T_c)=n(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})\left[C_oB_1-C_oT_cB_2\right]=$$

$$=nC_o(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})\left[\frac{T_ce^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}+\frac{e^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{(1-e^{-\frac{1}{\bar T}})^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{T_ce^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}\right]=\frac{nC_oe^{-\frac{T_c+1}{\bar T}}}{1-e^{-\frac{1}{\bar T}}}.$$

Графики этой функции приведены на рис. 2.

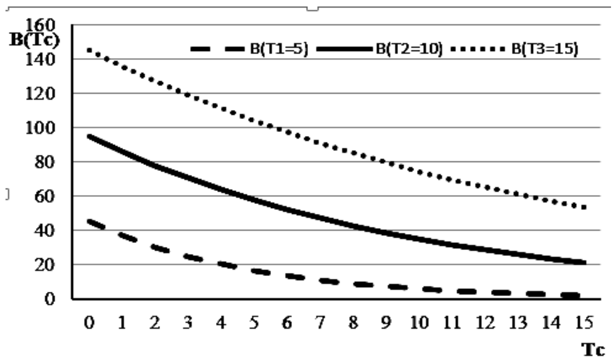

Рис. 2. Зависимости средних потерь при дефиците

Рациональное значение T_c отыскивается при совмещении соответствующих кривых, приведенных на рис. 1 и рис. 2.

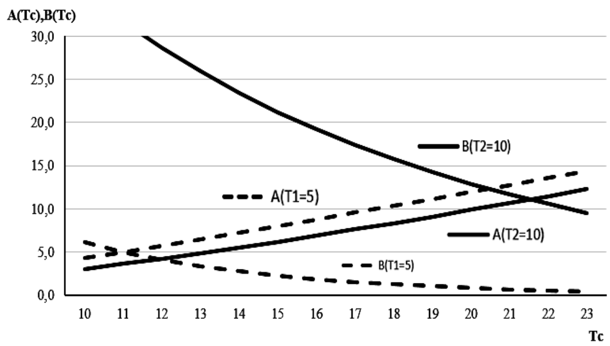

Рис. 3. Отыскание рационального значения T_c

Другой подход к оценке страхового запаса связан с учетом возможности допустимого риска.

Рассчитаем для выбранного значения страхового запаса Q вероятность превышения значением суммарных потерь допустимого порога.

Заданному значению запаса Q соответствует продолжительность $T_c = \frac{Q}{n}$ интервала, обеспечиваемого этим запасом. Вычислим вероятность того, что реальная задержка в поставке превзойдет интервал, равный $T_c + i$ суток

$$P = \text{Вер}(T > T_c + i) = \int_{T_c+i}^{\infty} \frac{1}{\overline{T}} e^{-\frac{t}{\overline{T}}} dt = -e^{-\frac{t}{\overline{T}}}\Bigg|_{T_c+i}^{\infty} =$$

$$= e^{-\frac{Tc+i}{\overline{T}}}. \quad (10)$$

При этом понятно, что если реальная задержка поставок превысит страховой интервал T_c более, чем на i суток, то это приведет к потерям, превышающим $C_o ni$. Рассчитаем таблицу вероятностей того, что случайные величины потерь превысят заданное значение в зависимости от величины страхового интервала T_c и значения величины задержки, определяемой i. Результаты для $C_o = 100, n = 8$ сведем в таблицу.

Таблица 1

Зависимость потерь от страхового интервала

	Потери		
Значение T_c	≥800 (i≥1)	≥1600 (i≥2)	≥2400 (i≥3)
5	0,3	0,25	0,2
10	0,11	0,09	0,07
15	0,041	0,033	0,027

Из соотношения (10) можно найти необходимый уровень страхового интервала T_c, при котором вероятность того, что задержка поставки превзойдет страховой интервал плюс, например, трое суток, будет не выше α.

При этом $e^{-\frac{(T_c+3)}{\overline{T}}} \le \alpha$.

Отсюда $-(T_c+3) \le \overline{T}\ln\alpha; \quad T_c + 3 \ge \overline{T}\ln\frac{1}{\alpha};$

$$T_c \ge \overline{T}\ln\frac{1}{\alpha} - 3.$$

Пусть $\overline{T} = 5, \quad \alpha = 0,05.$

Тогда

$$T_c \ge 5\ln\frac{1}{0,05} - 3 = 5\cdot 2,995 - 3 = 14,975 - 3 \cong 12.$$

Если $\alpha = 0,1$, то

$$T_c \ge 5\ln\frac{1}{0,1} - 3 = 5\cdot 2,3 - 3 \cong 8;$$

если $\alpha = 0,2$, то

$$T_c \ge 5\ln\frac{1}{0,2} - 3 = 5\cdot 1,605 - 3 \cong 5.$$

Выводы

Таким образом, предложен метод расчета уровня страхового запаса в предположении, что интервал задержки поставки случайная величина с известным законом распределения. Рациональное значение страхового интервала определяется путем минимизации среднего риска, учитывающего затраты от перерасхода средств при неоправданном превышении страховым запасом требуемого значения и потери при недостаточности запаса, приводящей к остановке производства.

Список литературы

1. *Шимко П.Д. Оптимальное управление экономическими системами. / П.Д. Шимко. – СПб.: Издательский дом «Бизнес-пресса», 2004. – 240 с.*
2. *Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДИАНА, 2002. – 390 с.*

Поступила в редколлегию 27.08.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ В УМОВАХ КОМБІНОВАНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В.В. Карпенко

Розглянута задача управління запасами у припущенні, що часовий інтервал від моменту замовлення до моменту поставки витрачуємого ресурсу випадковий. Запропонований метод розрахунку величини страхового запасу, мінімізуючого середній ризик, що враховує витрати при перевищенні потрібного рівня запасу и втрати від його дефіциту.

Ключові слова: *страховий запас, випадкова затримка поставки, середній ризик, витрати при перевитраті коштів, втрати від дефіциту.*

INVENTORY MANAGEMENT UNDER COMBINED UNCERTAINTY

V.V. Karpenko

The problem of inventory management under the assumption that the time interval from the moment of the order until the delivery of the sacrificial life is random. The method of calculating the amount of safety stock, minimizing average risk, taking into account the costs in excess of the required level of reserve and the loss of its deficit.

Keywords: *safety stock, a random delay in delivery, medium risk, cost overruns at the loss of the deficiency.*