УДК 517.977.1

Н.Б. Дахно

Державний університет телекомунікацій, Київ

МОДИФІКОВАНИЙ ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД ДЛЯ К-ПОЗИТИВНО ВИЗНАЧЕНИХ К-СИМЕТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ В СИСТЕМАХ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ДЛЯ УПРАВЛІННЯ БЕЗПЛОТНИМИ ЛІТАЛЬНИМИ АПАРАТАМИ

Розглянуто застосування модифікованого градієнтного методудо математичних моделей в системах підтримки прийняття рішень, що описуються інтегро-диференційними рівняннями з малою нелінійністю і К-позитивно визначеними К-симетричними операторами. На основі доведеної теореми зроблено висновки про достатню ефективність застосування модифікованого градієнтного методу у складі програмного забезпечення систем підтримки прийняття рішень для керування безпілотними літальними апаратами. Приведена методика для зручної практичної реалізації вказаного метода.

Ключові слова: *динамічні моделі, система підтримки прийняття рішень, польотне завдання, безпілотний літальний апарат, траєкторія польоту, варіаційно-градієнтний метод.*

Вступ

Інтенсивний розвиток безпілотних літальних апаратів (БПЛА) за останній час привів до значного поширення переліку завдань, як у військовій, так і в цивільній сферах. Безпілотні літаки можуть бути застосовані для вирішення завдань, виконання яких недоцільно пілотованими літальними апаратами в силу різних причин. В залежності від специфіки цих завдань, вимоги до них значно відрізняються від інших.

Головна особливість БПЛА– це їх економічність при експлуатації і відсутність ризику для життя екіпажу, можливість вести спостереження і моніторинг з багатьох точок протягом короткого періоду часу. У зв'язку з тим, що запас енергії на борту легкого безпілотного літака є обмеженим, то обмеженимє також час автономного польоту та можливості використання ряду характерних завдань.

Постановка завдання. Для мінімізації витрат на виконання завдань необхідно впровадження відповідної системи підтримки прийняття рішень (СППР), яка дозволяє в реальному масштабі часу розробляти оптимальну програму польоту БПЛА [1].

Основою СППР є формалізований опис – математична модель ситуації прийняття рішення. В даний час є значні успіхи в розробці і широкому практичному застосуванні математичних моделей різних класів для керування БПЛА [2,3]. Велике розмаїття ситуацій, що виникають при управлінні, необхідність оперативного прийняття рішень, що задовольняють різнорідним якісним вимогам, викликають необхідність комплексного використання багатого арсеналу математичних моделей і методів.

Математична модель БПЛА [4] описується рухом матеріальної точки і задається системою звичайних інтегро-диференційних рівнянь першого порядку або інтегро-диференційними рівняннями більш високого порядку.Тому для підвищення точності і швидкості обчислень в системах підтримки прийняття рішень для задач керування БПЛА для виконання польоту згідно із заданою програмою є ефективним застосування градієнтних методів.

На сьогоднішній день дослідження нелінійних моделей БПЛА розвинене дуже слабо. Тому поширення градієнтного метода на клас рівнянь з малою нелінійністю і К-позитивно визначеним К-симетричним оператором є актуальним та важливим завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Завдання планування траєкторії в контексті управління складними технічним об'єктами вивчається з 50-х років XX століття. Одним з перших проектів в цій області був відомий проект Стенфордського університету США по створенню робота SHAKEY в 1966-1972 рр. Саме він поклав початок багаторічним дослідженням методів і підходів до вирішення завдань планування траєкторії та управління безпілотними літальними апаратами, яким приділяється багато уваги [5, 6]. Останнім часом значна увага приділяється застосуванню систем підтримки прийняття рішень для задач управління БПЛА [1 – 3]. На жаль, майже всі існуючі методи планування траєкторії, що використовуються в системах управління сучасними безпілотними літальними апаратами, є достатньо ресурсномісткими і слабо розвинені для нелінійних моделей.

Метою даної статті є дослідження математичної моделі системи підтримки прийняття рішень для управління БПЛА, що описується інтегро-диференціальним рівнянням з малою нелінійністю із К-позитивно визначеним К-симетричним оператором за допомогою модифікованого градієнтного метода.

Основний матеріал

Основою систем моніторингу земної поверхні із БПЛА є система підтримки прийняття рішення. В таких системах досліджуються та розробляються алгоритми, які узгоджують динамічні характеристики об'єкта спостереження з параметрами польоту БПЛА. Це дозволяє в реальному масштабі часу розробляти або коригувати оптимальну програму польоту БПЛА для вирішення задач спостереження та пошуку заданих об'єктів. Крім того, СППР повинна вирішувати ряд основних задач, серед яких: визначення оптимальних режимів польоту в залежності від польотного завдання; визначення оптимальної траєкторії польоту для виконання польотного завдання; побудова оптимальних планів (програм) польотів тощо [1]. З метою вирішення цих завдань в останній час широко застосовуються обернені задачі механіки [4]. Ці задачі присвячені визначенню прикладених до механічної системи активних сил і моментів, а також обчисленню параметрів даної системи і накладених на неї зв'язків, при яких стає можливим один із рухів із заданими властивостями. Це дає можливість побудови траєкторій, що наближені до оптимальних з урахуванням прийнятих обмежень.

СППР в контурі системи управління БПЛА функціонує таким чином. Керівник розрахунку використання БПЛА – особа, що приймає рішення (ОПР), отримує завдання на проведення пошуку заданого об'єкта у визначеному районі, уточнює та доводить його до оператора керування БПЛА. Оператор формалізує задачу та на її основі, з урахуванням картографічної інформації, оцінки ситуації, аналізу даних, розробляє основні вимоги до виконання польотного завдання для БПЛА. Далі він вводить в СППР відповідні необхідні дані. На основі аналізу вхідної інформації щодо виконання задачі пошуку і розрахунків параметрів польоту БПЛА, СППР за допомогою модулів побудови варіантів плану (програми) польоту формує варіанти цього плану. В модулі прийняття рішення СППР на основі отриманих варіантів здійснюється вибір оптимального плану польоту. При необхідності ОПР контролює і корегує процес вибору плану польоту та, при необхідності, вносить зміни в нього. Характеристики отриманої програми польоту від СППР передаються в підсистему керування БПЛА, яка забезпечує виконання цієї програми.

Система підтримки прийняття рішення включає в себе ряд математичних моделей. Основну частку складають моделі на основі інтегро-диференційних рівнянь. Прискорення рішення таких математичних моделей дозволить покращити точність керування БПЛА та підвищити достовірність прийнятих рішень.

Введемо до розгляду інтегро-диференційні оператори

$$(Au)(t) = u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \ldots + \\ + a_{n-1}(t)u(t) + \sum_{i=1}^{n}\int_a^b A_i(x,\xi)u^{(i)}(\xi)d\xi, \quad (1)$$

$$(Fu)(t) = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b C_i(t,\xi)F(\xi,u(\xi))d\xi, \quad (2)$$

визначені на щільній в $L_2([a,b])$ множині

$$D(A) = \{u : u^{(n)} \in L_2([a,b]),\ U_l = 0,\ l = \overline{1,n-1}\},$$

де $a_i \in C([a,b])$, $i = \overline{1,n-1}$ і

$$U_l(u) = \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{li}u^{(i)}(a) + \beta_{li}u^{(i)}(b)),\ l = \overline{0,n-1}, \quad (3)$$

де α_{li}, β_{li} сталі числа.

Динамічна модель системи підтримки прийняття рішень для керування БПЛА описується крайовою задачею, що породжена інтегро-диференційним виразом з параметром λ:

$$(Au)(t) + \lambda(Fu)(t) = f(t),\quad f \in L_2([a,b]); \quad (4)$$

$$U_l(u) = 0, \qquad l = \overline{0,n-1}. \quad (5)$$

Вважаємо, що оператор A є K-позитивно визначеним K - симетричним, тобто існує оператор $K : D(K) \to L_2([a,b])$ вигляду:

$$(Ku)(t) = u^{(m)}(t) + k_1(t)u^{(m-1)}(t) + \ldots \\ \ldots + k_{m-1}u(t) + \sum_{i=1}^{m-1}\int_a^b K_i(t,\xi)u^{(i)}(\xi)d\xi, \quad (6)$$

$$U_l(u) = 0,\quad t \in [a,b],\ m \le n,\quad l = \overline{0,m-1},$$

такий, що виконуються умови

$$\exists\mu,\nu > 0 \quad \forall u,v \in D(A)$$

$$\int_a^b (Au)(t)(Ku)(t)dt \ge \mu\int_a^b u^2(t)dt, \quad (7)$$

$$\int_a^b (Ku)^2(t)dt \le \nu\int_a^b (Au)(t)(Ku)(t)dt, \quad (8)$$

$$\int_a^b (Au)(t)(Kv)(t)dt = \int_a^b (Av)(t)(Ku)(t)dt. \quad (9)$$

Нехай існує лінійний оператор

$B : D(B) \to L_2([a,b])$ і $D(B) = D(A)$, що

$$(Bu)(t) = u^{(n)}(t) + b_1(t)u^{(n-1)}(t) + \ldots + \\ + b_{n-1}u(t) + \sum_{i=1}^{n-1}\int_a^b B_i(t,\xi)u^{(i)}(\xi)d\xi, \quad (10)$$

де b_i – сталі числа.

Оператор B є K-позитивно визначеним і K-симетричним.

Вважаємо, що справедлива нерівність:

$$\exists\gamma,\delta > 0 \;:\; \gamma < \delta < \infty \quad \forall u \in D(A)$$

$$(\gamma - 1)\int_a^b (Bu)(t)(Ku)(t)dt \le \int_a^b (Au)(t)(Ku)(t)dt \le \tag{11}$$

$$\le (\delta - 1)\int_a^b (Bu)(t)(Ku)(t)dt.$$

Оператор F – нелінійний і задовольняє умові:

$$\exists\alpha,\beta > 0 \quad \forall u,v \in D(F)$$

$$\int_a^b ((Fu)(t) - (Fv)(t))K(u(t) - v(t))dt \ge \tag{12}$$

$$\ge \alpha\int_a^b (B(u(t) - v(t))K(u(t) - v(t))dt,$$

$$\int_a^b ((Fu)(t) - (Fv)(t))K(u(t) - v(t))dt \le$$

$$\le \beta\int_a^b (B(u(t) - v(t))K(u(t) - v(t))dt. \tag{13}$$

Розглядаючи задачу (4) – (5) вважаємо, що виконані умови (7) – (13) і $|\lambda| < \dfrac{2\gamma^{5/2}}{\beta\sqrt{\delta}(\delta + \gamma)}$. Застосуємо до задачі (4) – (5) модифікований градієнтний метод. Візьмемо $u_0 \in D(A)$ довільне початкове наближення, і припустимо, що $(k-1)$-ше наближення знайдено.

Тоді k-те шукаємо за формулою:

$$(Bu_k)(t) = (Bu_{k-1})(t) + \tau_k r_k(t), \quad t \in [a,b],\; k \ge 1, \tag{14}$$

де $r_k(t) = f(t) - (Au_{k-1})(t) - \lambda(Fu_{k-1})(t)$ - нев'язка, а τ_k деякий параметр, який визначається з умови мінімуму функціоналу:

$$\Phi(u_k) = \int_a^b (Au_k)(t)(Ku_k)(t)dt - $$

$$-2\int_a^b f(t)(Ku_k)(t)dt + \tag{15}$$

$$+2\lambda\int_a^b (Fu_{k-1})(t)(Ku_k)(t)dt.$$

Оскільки оператор B має обернений, існує функція Гріна для задачі:

$$(BR_k)(t) = r_k(t), \quad t \in [a,b]$$
$$U_l(R_k) = 0, \quad k \ge 1. \tag{16}$$

Тобто

$$R_k(t) = \int_a^b G(t,\xi)r_k(\xi)d\xi \tag{17}$$

і вираз (14) можна переписати у вигляді

$$u_k(t) = u_{k-1}(t) + \tau_k R_k(t), \;\; t \in [a,b]. \tag{18}$$

З умови мінімуму функціоналу (15) після перетворень з урахуванням (17) – (18) маємо співвідношення для визначення параметра τ_k :

$$\tau_k = \frac{\int_a^b R_k(t)(Kr_k)(t)dt}{\int_a^b (AR_k)(t)(KR_k)(t)dt}. \tag{19}$$

Обґрунтування методу. На множині $D(B)$ задамо новий скалярний добуток

$$[u,v] = (Bu,Kv) = \int_a^b (Bu)(t)(Kv)(t)dt. \tag{20}$$

Тоді для (20) будуть виконуватись всі аксіоми скалярного добутку, і лінійну множину $D(B)$ можна розглядати, як дійсний гільбертів простір. Будемо називати замикання множини $D(B)$ в сенсі метрики (20) енергетичним простором H_B. Норму елемента u в H_B будемо позначати через $|u|_B$, так що

$$|u|_B^2 = [u,u], \qquad u \in D(B).$$

Теорема: Якщо в рівнянні (4)оператори A і F задовольняють умові (6) – (13), параметр

$$|\lambda| < \frac{2\gamma^{5/2}}{\beta\sqrt{\delta}(\gamma + \delta)},$$

то модифікований градієнтний метод (14) – (19) збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою:

$$\left|u^* - u_k\right|_B \le \eta q^k \left|u^* - u_0\right|_B, \quad k \ge 1, \tag{21}$$

$$\eta = \frac{\delta + \lambda\beta}{\gamma + \lambda\alpha}, \quad q = \rho + |\lambda|\frac{\beta\sqrt{\delta}}{\gamma^{3/2}}, \quad \rho = \frac{\delta - \gamma}{\delta + \gamma}. \tag{22}$$

Доведення: Нехай K_0 - розширення оператора K на весь простір H_B. Тоді оператори A і B можуть бути розширені до замкнених K_0 - позитивно визначених операторів A_0 і B_0, таких, що $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. A_0 і B_0 мають неперервні обернені і H_B містить всі елементи, які реалізують мінімум функціоналу $\Phi(u_k)$.

Введемо заміни:

$$G = B^{-1}A, \quad C = B^{-1}F, \quad g = B^{-1}f. \tag{23}$$

Оператори G і C можуть бути розширені на весь H_B [7].

Розглянемо рівняння

$$Gu + \lambda Cu = g, \qquad g \in H_B. \tag{24}$$

Оператори G і C діють в просторі H_B. Оператор G є лінійним позитивно визначеним обмеженим і симетричним в H_B. Дійсно, з (9), (20)враховуючи (23), маємо

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H_B \quad [Gu, v] = [B^{-1}Au, v] = \\ = (Au, Kv) = (Av, Ku) = [Gv, u]. \end{aligned} \tag{25}$$

А умова (11) набуде вигляд:

$$\gamma |u|_B^2 \le [Gu, u] \le \delta |u|_B^2, \ \forall u \in H_B. \tag{26}$$

Для нелінійного оператора C умови (12), (13) приймуть вигляд

$$\begin{gathered} [Cu - Cv, u - v] \ge \alpha |u - v|_B^2, \\ \forall u, v \in H_B, \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} [Cu - Cv, u - v] \le \beta |u - v|_B^2, \\ \forall u, v \in H_B, \end{gathered} \tag{28}$$

В силу нерівностей (27), (28) нелінійний оператор C є Ліпшиць-неперервним і монотонним. Тобто рівняння (24) має єдиний розв'язок [7].

Після заміни (23) метод (14) – (19) набуде вигляд:

$$u_k = u_{k-1} + \tau_k \varepsilon_k, \tag{29}$$

де $\varepsilon_k = g - Gu_{k-1} - \lambda Cu_{k-1}$, а невідомий параметр τ_k знаходимо з умови мінімуму функціоналу:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(u_k) = [Gu_k, u_k] - \\ -2[g, u_k] + 2\lambda[Cu_{k-1}, u_k]. \end{aligned} \tag{30}$$

Після перетворень отримаємо вираз для визначення τ_k

$$\tau_k = \frac{[\varepsilon_k, \varepsilon_k]}{[G\varepsilon_k, \varepsilon_k]}. \tag{31}$$

Отже розв'язання задачі (4)– (5) методом (14) – (19) рівносильне розв'язанню рівняння (24) методом (29) – (31). Згідно теореми [8]про збіжність градієнтного методу, застосованого до рівнянь з малою нелінійністю, метод (29) – (31) збігається. Тобто збігається і метод(14) –(19),при цьому швидкість збіжності характеризується оцінкою (21)–(22).

Методика застосування модифікованого градієнтного метода. Розглянемо обчислювальну схему яку доцільно використовувати при практичній реалізації модифікованого градієнтного метода для динамічних моделей з малою нелінійністю і K-позитивно визначеним K-симетричним оператором (рис. 1).

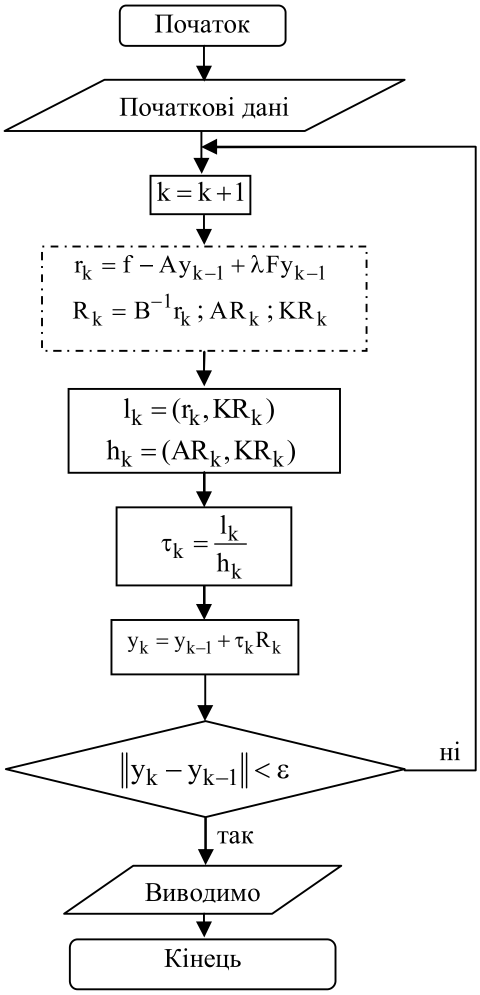

Рис. 1. Блок-схема алгоритму модифікованого градієнтного методу

1. Задамо початкові дані x_0, ε, $k = 1$.
2. Обчислимо нев'язку:

$$r_k(t) = u(t) - x_{k-1}^{(m)}(t) + a_1(t)x_{k-1}^{(m-1)}(t) + \ldots +$$
$$+a_{m-1}(t)x_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^{m}\int_a^b A_i(x,\xi)x_k^{(i)}(\xi)d\xi -$$
$$-\lambda\sum_{i=1}^{l}\int_a^b C_i(t,\xi)F(\xi, x_{k-1}(\xi))d\xi.$$

3. Знайдемо функцію Гріна для задачі

$$(BR_k)(t) = r_k(t), \quad t \in [a, b],$$
$$U_l(R_k) = 0, \qquad l = \overline{0, m-1}, \quad k \ge 1.$$

Тобто $R_k(t) = \int_a^b G(t,\xi)r_k(\xi)d\xi$ при $t \in [a, b]$.

4. Обчислимо вирази

$$(AR_k)(t) = R_k^{(m)}(t) + a_1(t)R_k^{(m-1)}(t) + \ldots +$$
$$+a_{m-1}(t)R_k(t) + \sum_{i=1}^{m}\int_a^b A_i(x,\xi)R_k^{(i)}(\xi)d\xi;$$

$$(KR_k)(t) = R_k^{(s)}(t) + k_1(t)R_k^{(s-1)}(t) + ... +$$

$$+k_{s-1}R_k(t) + \sum_{i=1}^{s-1}\int_a^b K_i(t,\xi)R_k^{(i)}(\xi)d\xi.$$

5. Обчислимо скалярні добутки

$$l_k = \int_a^b r_k(t)KR_k(t)dt\,; \quad h_k = \int_a^b AR_k(t)KR_k(t)dt\,.$$

6. Обчислимо параметр τ_k : $\tau_k = \dfrac{l_k}{h_k}.$

7. Запишемо наближення $x_k = x_{k-1} + \tau_k R_k$

8. Якщо $\int_a^b (x_k(t) - x_{k-1}(t))^2 dt \geq \varepsilon^2$, то $k = k+1$

і повторити кроки 2–7.

Цей алгоритм дає можливість оптимально реалізувати модифікований градієнтний метод в процесі автоматизації керування безпілотним літальним апаратом.

Висновки

Застосування варіаційно-градієнтних методів в СППР дозволить досягти нової якості функціонування автоматизованих систем управління, істотно підвищити оперативність обробки інформації в процесах прийняття рішень і, тим самим, підвищити якість і ефективність управлінняБПЛА.

Це дозволить підвищити ефективність застосування безпілотних комплексів розвідки та спостереження за рахунок автоматизації підготовки польотного завдання, оптимізації маршруту польоту з прив'язкою до електронної карти місцевості та визначення оптимальних параметрів польоту з можливістю корегування параметрів польотного завдання в реальному масштабі часу.

Список літератури

1. *Самков О.В. Підтримка прийняття рішень в системі управління літального апарата / О.В. Самков, В.І. Сілков, О.П. Гожий, О.Є. Мавренков // Збірник наукових праць Державного науково-дослідного інституту авіації. – К.: ДНДІА, 2012. – Вип.(8)15. – С. 104 – 109.*

2. *Барабаш О.В. Нечіткі моделі опису ситуацій в системах автоматичного управління літальним апаратом / О.В. Барабаш, Д.М. Обідін, Р.В. Хращевський // Збірник наукових праць Військового інституту КНУ імені Тараса Шевченка. – К.: ВІКНУ, 2012. – № 38. – С. 6 – 13.*

3. *Барабаш О.В. Модель баз знань інтелектуальної системи управління високошвидкісного рухомого об'єкта на основі її верифікації / О.В. Барабаш, Д.М. Обідін, А.П. Мусієнко // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. – Х.: ХУПС, 2004. – № 5 (121). – С. 3 – 6.*

4. *Кондратьева Л.А. Обратные краевые задачи на многообразиях / Л.А. Кондратьева // Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Математика. Информатика. Физика. – М., 2010. – №1. – С. 34 – 38.*

5. *Беспилотные летательные аппараты: Методики приближенных расчетов основных параметров и характеристик / В.М. Илюшко, М.М. Митрахович, А.В. Самков, В.И. Силков и др.; под общ. ред. В.И Силкова. – К.: ЦНДІ ОВТ ЗС України, 2012. – 302 с.*

6. *Мосов С.П. Аналіз застосування авіації в післявоєнний період / С.П. Мосов, Р.В. Хращевський / Системи озброєння і військова техніка. – Х.: ХУПС, 2009. – № 1 (17). – С. 67 – 71.*

7. *Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.*

8. *Дахно Н.Б. Застосування модифікованого градієнтного методу до операторних рівнянь з малою нелінійністю для аналізу захищеності інформаційних структур /Н.Б. Дахно // Вісник ДУІКТ. – К.:ДУІКТ, 2009. – Т. 7(4). – С. 323 – 327.*

Надійшла до редколегії 29.09.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.В. Кравченко, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ К-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ К-СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СИСТЕМАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

Н.Б. Дахно

Рассмотрено применение модифицированного градиентного метода к математическим моделям в системах поддержки принятия решений, которые описываются интегро-дифференциальными уравнениями с малой нелинейностью и К-положительно определенными К-симметричными операторами. На основе доказанной теоремы сделаны выводы о достаточной эффективности применения модифицированного градиентного метода в составе программного обеспечения систем поддержки принятия решений, для управления беспилотными летательными аппаратами. Приведенаметодикадляудобнойпрактическойреализацииуказанногометода.

Ключевые слова: *динамические модели, система поддержки принятия решения, полетное задание, беспилотныйлетательный аппарат, траектория полета, вариационно-градиентный метод.*

MODIFIED GRADIENT METHOD FOR K-POSITIVE DEFINITENESS OF K-SYMMETRIC OPERATOR IN A DECISION SUPPORT SYSTEM FOR CONTROL UNMANNED AERIAL VEHICLES

N.B. Dakhno

The application of the modified gradient method to mathematical models in decision support systems, which are described by integro-differential equations with small nonlinearity and the K-positive definite K-symmetric operators,isreviewed. Conclusionsabout the sufficient effectivenessof the modified gradient method in the software of decision support systems for the control of unmanned aerial vehicles are based on the proved theorem. The technique for easy practical implementation of this method is provided.

Keywords: *dynamic models, decision support system, flight mission, unmanned aerial vehicles, trajectory, variation-gradient method.*