УДК 515.164.15 : 517.925

В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев

*Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела, Харьков*

# ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КАТАСТРОФ. КАСПОИДНЫЕ КАТАСТРОФЫ

*Для каспоидных катастроф типа: складка, сборка первого типа, сборка второго типа, ласточкин хвост, бабочка первого типа, бабочка второго типа, вигвам, в явном виде определены элементарные дифференциально-геометрические характеристики, такие, как: отрезки касательной, подкасательной, нормали, поднормали, кривизну и радиус кривизны катастрофы, координаты центра её кривизны.*

***Ключевые слова:*** *теория катастроф, каспоидные катастрофы, катастрофы типа: складка, сборка первого типа, сборка второго типа, ласточкин хвост, бабочка первого типа, бабочка второго типа, вигвам, касательная, подкасательная, нормаль, поднормаль, кривизна кривой, радиус кривизны, координаты центра кривизны кривой.*

## Введение

В современном представлении математическую теорию катастроф рассматривают как часть качественной теории нелинейных систем, которая позволяет предсказывать скачкообразные изменения состояния системы при плавном изменении её параметров. Формальное определение катастрофы как математического объекта с особыми свойствами и рассмотрение возникающих при этом задач дано в работах [1 – 3]. Для изложения дальнейшего материала примем следующее определение, приведенное в различных вариантах в работах [1 – 3]. Предметом теории катастроф служит изучение зависимости поведения систем различной природы (решения уравнений, моделирующих поведение этих систем) в зависимости от изменения значений коэффициентов, определяющих её состояние.

**Анализ литературы.** В соответствии с работами [1 – 4] рассмотрим многочлен не менее чем третьей степени:

$$G = V(X,C),\ X = x_1,\dots x_j,\dots x_n;\ \ C = c_1,\dots c_\alpha, c_k, \quad (1)$$

зависящий от $n$ переменных и дифференцируемый не менее двух раз. Примем, что $1 \le j \le n$ и $1 \le \alpha \le k$. Такой многочлен называют потенциальной функцией катастрофы. В условии (1) вектор переменных $X$ называют вектором фазовых координат системы (1), вектор $C$ называют вектором управляющих параметров этой же системы. Выражение (1) называют потенциальной функцией катастрофы. Состояние равновесия системы (1) определяют из условия:

$$F(X,C) = \mathrm{grad}V(X,C) = 0. \quad (2)$$

Решение этой системы относительно вектора переменных $X = X(C)$ определяет критические точки системы, определяемой условием (1). Задача элементарной теории катастроф состоит в изучении влияния изменения значений вектора управляющих параметров $C$ на изменение вектора фазовых координат $X$ системы (1). Для дальнейшего нам потребуются также неморсовы точки, определяющие множество сингулярности для системы (1). Их определяют по условию:

$$\det H(V(X,C)) = 0\,, \quad (3)$$

где $H(V(X,C))$ – гессиан функции $V(X,C)$.

В табл. 1, 2 приведены потенциальные функции основных, так называемых, элементарных катастроф. Их выражения заимствованы из работы [1, С. 161]. В этих таблицах, для сохранения преемственности с терминологией, принятой в работе [1, 5] и удобства последующего анализа, катастрофой второго типа названа двойственная катастрофа по отношению к катастрофе первого типа. В табл. 1 приведены потенциальные функции катастроф, зависящие от одной переменной – каспоидные катастрофы. В табл. 2 приведены потенциальные функции катастроф, зависящие от двух переменных – омбилические катастрофы. В работах по математическому анализу [6] и дифференциальной геометрии [7] сказано, что плоскую линию можно задать в явном виде:

$$y = f(x)\,; \quad (4)$$

и неявном виде:

$$F(x,y) = 0. \quad (5)$$

Из условия (1) следует, что потенциальные функции каспоидных катастроф можно рассматривать как линии, заданные в явном виде. Из условий (2) и (3) следует, что для потенциальных функций омбилических катастроф линиями, заданными в неявном виде, можно считать состояния равновесия и множества сингулярности. В работе [6] к свойствам линий, изучаемых с помощью приложения дифференциального исчисления к геометрии, отнесены: получение уравнения касательной, определение длин отрезка касательной, отрезка нормали, отрезка подкасательной, отрезка поднормали, определение кривизны кривой и координат центра кривизны. Для линий, заданных в явном виде, в виде (4), из работ [6, 8 – 10] известны следующие соотношения, приведенные в табл. 3.

Таблица 1

Потенциальные функции каспоидных катастроф

| Тип каспоидной катастрофы | Каноническая форма (потенциальная функция) |
|---|---|
| Складка | $V(x) = x^3 + ux$ |
| Сборка первого типа | $V(x) = x^4 + ux^2 + hx$ |
| Сборка второго типа | $V(x) = -(x^4 + ux^2 + hx)$ |
| Ласточкин хвост | $V(x) = x^5 + ux^3 + hx^2 + wx$ |
| Бабочка первого типа | $V_1(x) = x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + wx$ |
| Бабочка второго типа | $V_2(x) = -(x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + wx)$ |
| Вигвам | $V(x) = x^7 + tx^5 + ux^4 + hx^3 + gx^2 + rx$ |

Таблица 2

Потенциальные функции омбилических катастроф

| Тип омбилической катастрофы | Каноническая форма (потенциальная функция) |
|---|---|
| Эллиптическая омбилика | $V(x, y) = x^2y - y^3 + tx^2 + gy + hx$ |
| Гиперболическая омбилика | $V(x, y) = x^2y + y^3 + tx^2 + gy + hx$ |
| Параболическая омбилика первого типа | $V(x, y) = x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx$ |
| Параболическая омбилика второго типа | $V(x, y) = (-1)\cdot(x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx)$ |
| Вторая эллиптическая омбилика | $V(x, y) = x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$ |
| Вторая гиперболическая омбилика | $V(x, y) = x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$ |
| Символическая омбилика первого типа | $V(x, y) = x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx$ |
| Символическая омбилика второго типа | $V(x, y) = (-1)\cdot(x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx)$ |

Таблица 3

Основные дифференциально-геометрические характеристики для линий, заданных в явном виде

| № п/п | Наименование характеристики | Уравнение |
|---|---|---|
| 1 | Касательная в точке $(x_0, y_0)$ | $y - y_0 = y_0'(x - x_0')$ |
| 2 | Нормаль в точке $(x_0, y_0)$ | $-y_0'(y - y_0) = x - x_0$ |
| 3 | Отрезок касательной | $MT = \left\|(y/y')\cdot\sqrt{1+(y')^2}\right\|$ |
| 4 | Отрезок нормали | $MN = \left\|y\sqrt{1+(y')^2}\right\|$ |
| 5 | Подкасательная | $PT = \|y/y'\|$ |
| 6 | Поднормаль | $PN = \|yy'\|$ |
| 7 | Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$ | $K = \|y''(x)\| \Big/ \left(1+(y')^2\right)^{3/2}$ |
| 8 | Радиус кривизны в произвольной точке $M(x, y)$ | $R = 1/K$ |
| 9 | Координаты $\xi, \eta$ центра C кривизны | $\xi = x - y'\left(1+(y')^2\right)\Big/y''$; $\eta = y + \left(1+(y')^2\right)\Big/y''$; $y'' \neq 0.$ |

В табл. 3 условные обозначения характеристик совпадают с аналогичными обозначениями, принятыми в работе [8].

Для линий, заданных в явном виде, в виде (5), из работ [6, 9, 10], известны следующие соотношения, приведенные в табл. 4.

Таблица 4

Основные дифференциально-геометрические характеристики для линий, заданных в неявном виде

| № п/п | Наименование характеристики | Уравнение |
|---|---|---|
| 1 | Касательная в точке $\left(x_0, y_0\right)$ | $F_x'\left(x-x_0\right)+F_y'\left(y-y_0\right)=0$ |
| 2 | Нормаль в точке $\left(x_0, y_0\right)$ | $\left(x-x_0\right)/F_x'=\left(y-y_0\right)/F_y'$ |
| 3 | Кривизна кривой в произвольной точке $M(x,y)$ | $K=\left\| D\Big/\left(\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2\right)^{3/2}\right\|$ |
| 4 | Радиус кривизны в произвольной точке $M(x,y)$ | $R=1/K$ |
| 5 | Координаты $\xi,\eta$ центра *C* кривизны | $\xi=x-\dfrac{F_x'\left(\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2\right)}{D};\ \eta=y+\dfrac{F_y'\left(\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2\right)}{D}$ |

В табл. 4 принято, что определитель

$$D=\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

В доступной авторам литературе, например [11 – 13], аналитические выражения для определение этих свойств элементарных катастроф не найдены. Следует отметить, что определение уравнений касательной и нормали не вызывает затруднений, поэтому в рамках данной работы они не рассмотрены.

**Постановка задачи.** Для линий, соответствующих потенциальным функциям каспоидных и омбилических катастроф, определить аналитические выражения для отрезка касательной, отрезка нормали, подкасательной, поднормали, координаты центра кривизны, кривизну кривой, радиус кривизны. Для омбилических катастроф определяли выражения только для трёх последних свойств.

## Полученные результаты

В данной работе для катастроф, которые могут быть представлены в виде функции одной переменной – каспоидных катастроф, получены их дифференциально-геометрические характеристики, приведенные в табл. 1. Уравнения касательной и нормали опущены вследствие их очевидности. Для каждого типа катастроф сохранены те обозначения, которые указаны в табл. 1, их область действия ограничена типом рассматриваемой катастрофы. Для сокращения объёма статьи все промежуточные выкладки не приведены.

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА СКЛАДКИ. Её уравнение имеет вид:

$$V(x)=x^3+ux. \qquad (7)$$

Отрезок касательной:

$$MT=\left|x\left(x^2+u\right)\Big/\left(3x^2+u\right)\right|\sqrt{9x^4+6ux^2+u^2+1}. \qquad (8)$$

Отрезок нормали:

$$MN=\left|x\left(x^2+u\right)\right|\sqrt{9x^4+6ux^2+u^2+1}. \qquad (9)$$

Подкасательная:

$$PT=\left|x\left(x^2+u\right)\Big/\left(3x^2+u\right)\right|=\left|\frac{2ux}{3\left(3x^2+u\right)}+\frac{x}{3}\right|. \qquad (10)$$

Поднормаль:

$$PN=\left|x\left(x^2+u\right)\left(3x^2+u\right)\right|=\left|3x^5+4ux^3+u^2x\right|. \qquad (11)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x,y)$:

$$K=\frac{6|x|}{\left(1+z^2\right)^{3/2}}=\frac{6|x|}{\left(9x^4+6ux^2+u^2+1\right)^{3/2}}. \qquad (12)$$

Координаты $\xi,\eta$ её центра кривизны C:

$$\varepsilon=\frac{x\left(1-3u^2\right)}{2}-\left(\frac{u\left(u^2+1\right)}{6x}+\frac{9ux^3}{2}+\frac{9x^5}{2}\right); \qquad (13)$$

$$\eta=\frac{15x^4+12ux^2+u^2+1}{6x}. \qquad (14)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФЫ СБОРКИ. Уравнение катастрофы сборки 1-го вида имеет вид:

$$V(x)=x^4+ux^2+hx. \qquad (15)$$

Для катастроф сборки, независимо от их вида, введём следующие вспомогательные обозначения:

$$\frac{dy}{dx}=4x^3+2ux+h=z; \qquad (16)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2+2u=\beta; \qquad (17)$$

$$A=B+C; \qquad (18)$$

$$B=16x^6+16ux^4+8h^3; \qquad (19)$$

$$C=4u^2x^2+4hux+h^2+1; \qquad (20)$$

$$D=6x^2+u. \qquad (21)$$

Для катастрофы типа сборки первого вида для её дифференциально-геометрических свойств получим следующие выражения:

Отрезок касательной:

$$MT=\sqrt{|A|}\left|\frac{x\left(x^3+ux+h\right)}{4x^3+2ux+h}\right|. \qquad (22)$$

Отрезок нормали:

$$MN = \sqrt{|A|} \cdot \left| x\left(x^3 + ux + h\right) \right| . \quad (23)$$

Подкасательная:

$$PT = \left| x\left(x^3 + ux + h\right) \Big/ \left(4x^3 + 2ux + h\right) \right| = \\ = \left| \frac{ux^2}{2\left(4x^3 + 2ux + h\right)} + \frac{3hx}{4\left(4x^3 + 2ux + h\right)} + \frac{x}{4} \right| . \quad (24)$$

Поднормаль:

$$PN = \left| x\left(x^3 + ux + h\right)\left(4x^3 + 2ux + h\right) \right| . \quad (25)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$:

$$K = \frac{12x^2 \cdot \text{sign}\left(6x^2 + u\right)}{A^{3/2}} + \frac{2u \cdot \text{sign}\left(6x^2 + u\right)}{A^{3/2}} . \quad (26)$$

Координаты $\xi, \eta$ центра C кривизны следующие:

$$\xi = x - z(1 + z^2)/\beta ; \quad (27)$$

$$\zeta = -\left[ \begin{array}{c} \frac{h^3}{2D} + \frac{3h^2x\left(u + 2x^2\right)}{D} + \\ + \frac{h\left(12u^2x^2 + 48ux^4 + 48x^6 + 1\right)}{2D} + \\ + \frac{4x^3\left(u^3 + 6u^2x^2 + 12ux^4 + 8x^6 - 1\right)}{D}. \end{array} \right] . \quad (28)$$

Для катастрофы типа сборки второго вида координаты $\xi, \eta$ её центра кривизны C следующие:

$$\zeta = -\left[ \begin{array}{c} \frac{\left(h^3 - 24h^2x^3 + h\left(192x^6 + 1\right) - 8x^3\left(64x^6 + 1\right)\right)}{2D} + \\ +4u^2x^3 + 6ux^2 + 3x\left(h^2 - 4hx^3 + 16x^6\right). \end{array} \right] ; (29)$$

$$\eta = -\left[ \frac{h^2}{2D} + \frac{hx\left(3u + 10x^2\right)}{D} + \frac{6u^2x^2 + 30ux^4 + 28x^6 + 1}{2D} \right] . (30)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА ЛАСТОЧКИН ХВОСТ. Уравнение катастрофы типа ласточкин хвост имеет вид:

$$V\left(x\right) = x^5 + ux^3 + hx^2 + \omega x = y . \quad (31)$$

Для упрощения дальнейшего изложения примем,:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3ux^2 + 2hx + \omega = z ; \quad (32)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} 20x^3 + 6ux + 2h = \beta . \quad (33)$$

С учётом введенных в (34) и (35) обозначений получим уравнение отрезка касательной в виде:

$$MT = \left| \left[ \frac{x}{2} - \frac{x\left(ux^2 - \omega + 3x^4\right)}{2\left(2hx + 3ux^2 + \omega + 5x^4\right)} \right] \cdot \sqrt{1 + z^2} \right| . \quad (34)$$

Отрезок нормали:

$$MN = \left| y\sqrt{1 + z^2} \right| \cdot \quad (35)$$

Подкасательная:

$$PT = \left\| \left[ \frac{x}{2} - \frac{x\left(ux^2 - \omega + 3x^4\right)}{2\left(2hx + 3ux^2 + \omega + 5x^4\right)} \right] \right\| . \quad (36)$$

Поднормаль:

$$MT = \left| PT\sqrt{1 + z^2} \right| \cdot \quad (37)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$:

$$K = 2\left| h + x\left(3u + 10x^2\right) \right| \Big/ \Omega , \quad (38)$$

Где принято, что:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \omega^2 + 2\omega x\left[2h + x\left(3u + 5x^2\right)\right]4h^2x^2 + \\ +4h^3\left(3u + 5x^2\right) + 9u^2x^4 + 30ux^6 + 25x^8 + 1. \end{array} \right\}^{3/2} \quad (39)$$

Для удобства вычисления координат $\xi, \eta$ центра C кривизны примем, что:

$$B = 2\left[ h + x\left(3u + 10x^2\right) \right] ; \quad (40)$$

$$C = 12h^2x^2 + 12hx^3\left(3u + 5x^2\right) = \\ = 12hx^2\left[ h + x\left(3u + 5x^2\right) \right] ; \quad (41)$$

$$D = 27u^2x^4 + 90ux^6 + 75x^8 + 1 ; \quad (42)$$

$$E = 8h^3x + 12h^2x^2\left(3u + 5x^2\right) ; \quad (43)$$

$$F = 6hx^3\left(9u^2 + 30ux^2 + 25x^4\right) ; \quad (44)$$

$$G = 2\left(3ux + h + 10x^3\right) ; \quad (45)$$

$$H = \Sigma + \Psi ; \quad (46)$$

$$\Sigma = h^3x^3 + 3h^2x^2\left(\omega - 5x^4\right) + \\ +hx\left(3\omega^3 - 30\omega x^4 + 75x^8 + 1\right) ; \quad (47)$$

$$\Psi = \omega^3 - 15\omega^2x^4 + \omega\left(75x^8 + 1\right) - 5x^4\left(25x^8 + 1\right) ; \quad (48)$$

$$Z = ux^3\left(15hx + 9\omega + 15x^4 + 2\right) ; \quad (49)$$

$$L = x\left[ \begin{array}{c} 7h^2x^2 + hx\left(9\omega + 5x^4 + 2\right) + \\ +3\omega^2 + 2\omega + 25x^8 + 2x^4 + 1 \end{array} \right] . \quad (50)$$

Координаты $\xi, \eta$ центра кривизны C катастрофы типа ласточкин хвост определим по условиям:

$$\zeta = -\left\{ B^{-1} \left[ \begin{array}{l} \omega^3 + 3\omega^2xC + \omega\left(C + D\right) + \\ +x^2E + F + 27u^2x^4 + 135\times \\ \times\left(u^2x^6 + 3u\left(75x^8 - 1\right) + 5x^2\left(25x^8 - 3\right)\right) \end{array} \right] \right\} ; (51)$$

$$\eta = G^{-1}H + \frac{1}{2}\left(9u^2x^5 + Z + L\right) . \quad (52)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФЫ БАБОЧКА. Уравнение катастрофы БАБОЧКА первого вида имеет вид:

$$V(x) = x^6 + tx^4 + ux^3 + \omega x = y\,. \qquad (53)$$

Для катастроф типа БАБОЧКА, независимо от их вида, введём вспомогательные обозначения:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + \omega = z\,; \qquad (54)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 30x^4 + 12tx^2 + 6x = \beta\,. \qquad (55)$$

Тогда отрезок касательной примет вид:

$$MT = \left|\left(\frac{tx^4}{3A} + \frac{ux^3}{2A} + \frac{5\omega x}{6A} + \frac{x}{6}\right)\sqrt{1+z^2}\right|; \qquad (56)$$

где $\qquad A = 6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + \omega\,. \qquad (57)$

Отрезок нормали примет вид:

$$MN = \left|y\sqrt{1+z^2}\right|\cdot \qquad (58)$$

Уравнение для подкасательной примет вид:

$$PT = \left|\frac{tx^4}{3A} + \frac{4x^3}{2A} + \frac{5\omega x}{6A} + \frac{x}{6}\right|. \qquad (59)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x,y)$:

$$K = 6\left|x\left(5x^3 + 2tx + u\right)\right| \big/ E^{3/2}\,, \qquad (60)$$

где

$$E = \begin{bmatrix} \omega^2 + 2\omega x^2(6x^3 + 4tx + 3u) + \\ +36x^{10} + 48tx^8 + 36ux^7 + 16x^2 + \\ +24ux^5 + 9u^2x^2 \end{bmatrix}^{3/2}. \qquad (61)$$

Координаты $\xi, \eta$ центра кривизны C катастрофы типа БАБОЧКА ПЕРВОГО ВИДА определим по условиям:

$$\xi = \frac{B}{C} - \frac{9^u 2x^5}{2} - \frac{9ux^3\left(2tx^3 + \omega + x^5\right)}{2} - \frac{D}{2}, \qquad (62)$$

где

$$\begin{gathered} B = 8t^3x^9 + 12t^2x^6\left(9x^5 - \omega\right) + \\ +2tx^3\left(3\omega^2 - 54\omega x^5 + 243x^{10} + 1\right) - \omega^3 + \\ +729x^{15} + 9x^5 + 27\omega^2x^5 - \omega\left(243x^{10} + 1\right); \end{gathered} \qquad (63)$$

$$\begin{gathered} B = 8t^3x^9 + 12t^2x^6\left(9x^5 - \omega\right) + \\ + 2tx^3\left(3\omega^2 - 54\omega x^5 + 243x^{10} + 1\right) - \omega^3 + \\ + 729x^{15} + 9x^5 + 27\omega^2x^5 - \omega\left(243x^{10} + 1\right) \end{gathered} \qquad (64)$$

$$C = 6x\left[u + x\left(2t + 5x^2\right)\right]\;; \qquad (65)$$

$$D = x\left(12t^2x^6 + 6tx^3\left(\omega + 6x^5\right) + 3\omega^2 - 9\omega x^5 + 63x^{10} - 1\right). \qquad (66)$$

Тогда $\qquad \eta = \left(E + F\right)/C\,, \qquad (67)$

где принято, что:

$$E = 15u^2x^4 + 6ux^2\left(12x^5 + 7tx^3 + 2\omega\right); \qquad (68)$$

$$F = 66x^{10} + 72ux^7 + 42\omega x^5 + 15u^2x^4 + 12u\omega x^2 + \omega^2 + 1. \qquad (69)$$

Уравнение катастрофы типа БАБОЧКА ВТОРОГО ВИДА имеет вид:

$$V(x) = -\left(x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + \omega x\right). \qquad (70)$$

Координаты $\xi, \eta$ центра кривизны C катастрофы типа БАБОЧКА ВТОРОГО ВИДА определим по условиям:

$$\begin{gathered} \zeta = x - \frac{6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2hx + \omega}{2\left(15x^4 + 6tx^2 + 3ux + h\right)} \times \\ \times\left(1 + 4\left(15x^4 + 6tx^2 + 3ux + h\right)\right); \end{gathered} \qquad (71)$$

где $\quad \eta = -\left[\frac{A}{B} + \frac{5ux^3}{2} + x\left(5hx + 4tx^3 + 4\omega + x^5\right)\right]; \quad (72)$

$$A = C + E + F\,; \qquad (73)$$

$$C = h^2x^2 - 2hx\left(2tx^3 - \omega + 9x^5\right); \qquad (74)$$

$$E = 4t^2x^6\left(9x^5 - \omega\right); \qquad (75)$$

$$F = \omega^2 - 18\omega x^5 + 81x^{10} + 1\,. \qquad (76)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА ВИГВАМ. Её уравнение имеет вид:

$$V(x) = x^7 + tx^5 + ux^4 + hx^3 + gx^2 + rx = y\,. \qquad (77)$$

Примем, что:

$$\frac{dy}{dx} = 7x^6 + 5tx^4 + 4ux^3 + 3hx^2 + 2gx + r = z\,; \qquad (78)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 42x^5 + 20tx^3 + 12ux^2 + 6hx + 2g = \beta\,. \qquad (79)$$

Отрезок подкасательной:

$$PT = \left|(7z)^{-1}\left(2tx^5 + 3ux^4 + 4hx^3 + 5gx^2 + 6rx\right) + \frac{x}{7}\right|. \qquad (80)$$

Отрезок касательной:

$$MT = \left|PT\sqrt{1+z^2}\right|\cdot \qquad (81)$$

Поднормаль:

$$PN = x\left(x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + gx + r\right)z\,. \qquad (82)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x,y)$:

$$k = \frac{2\left|21x^5 + 10tx^3 + 6ux^2 + 3hx + g\right|}{\left(A + C + E + D + F + G + H + I + J\right)^{3/2}}\,. \qquad (83)$$

В условии (82) принято, что:

$$A = 49x^{12} + 70tx^{10} + 56ux^9\,; \qquad (84)$$

$$C = x^8\left(42h + 25t^2\right);\ (85)\quad E = 4x^7\left(7g + 10tu\right);\ (86)$$

$$D = 2x^6\left(15ht + 7r + 8u^2\right);\ (87)\ F = 4x^5\left(5gt + 6hu\right);\ (88)$$

$$G = x^4\left(16gu + 9h^2 + 10rt\right);\ (89)\ H = 4x^3\left(3gh + 2ru\right);\ (90)$$

$$I = 2x^2\left(2g^2 + 3hr\right);\quad (91)\quad J = 4grx + r^2 + 1.\ (92)$$

Координаты $\xi, \eta$ её центра кривизны C:

$$\zeta = x - \frac{7x^6 + 5tx^4 + 4ux^3 + 3hx^2 + 2gx + r}{2\left(21x^5 + 10tx^3 + 6ux^2 + 3hx + g\right)}\left(1 + z^2\right);(93)$$

$$\eta = W^{-1}\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}g^2x^2 + 2gx\left(r - x^3S\right) + r^2 - 2rx^3S + \\ +25t^2x^8 + 20tx^7\left(u + 7x^3\right) + V\end{array}\right] + \\ +\dfrac{5hx^3}{2} + x\left(5gx + 4r + 2tx^4 + x^3\left(4u - 5x^3\right)\right)\end{array}\right].(94)$$

В условиях (92), (93) принято, что:

$$W = 2\left(3hx + g + x^2\left(10tx + 3\left(2u + 7x^3\right)\right)\right);\quad (95)$$

$$V = U^2x^6 + 56ux^2 + 196x^2 + 1;\quad (96)$$

$$S = 5tx + 2(u + 7x^3).\quad (97)$$

Полученные в данном сообщении простейшие дифференциально-геометрические характеристики каспоидных катастроф могут быть использованы при моделировании взрывных процессов различной природы.

## Выводы

1. Предложено для каспоидных и омбилических катастроф определять такие элементарные дифференциально-геометрические характеристики, как отрезки касательной, подкасательной, нормали, поднормали, кривизну и радиус кривизны катастрофы, координаты центра её кривизны.

2. Для катастроф типа складка, сборка первого типа, сборка второго типа, ласточкин хвост, бабочка первого типа, бабочка второго типа, вигвам эти характеристики определены в явном виде.

3. Полученные результаты рекомендуется использовать при моделировании взрывных процессов различной природы.

## Список литературы


1. *Постон Т. Теория катастроф и её приложения. [Текст] / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980. – 607 с.*
2. *Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. [Текст] / Р. Гилмор // М.: Мир, 1984. – Кн. 1. – 350 с., кн. 2. –285 с.*
3. *Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. [Текст] / Дж. М. Томпсон. – М.: Мир, 1985. – 254 с.*
4. *Цветков В.И. Теория катастроф и фрактальная модель кризисных социально-экономических процессов. [Текст] / И.В. Цветков // Вестник ТвГУ. Серия: «Прикладная математика». – 2010. – Вып. 19. – С. 71-79.*
5. *Бекман И.Н. Катастрофы. Курс лекций. [Электронный ресурс] / И.Н. Бекман. – Режим доступа http://beckuniver.ucoz.ru/Katastrofy/Katastrofy.htm..*
6. *Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3 т. [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматгиз, 1962. – Т.1. – 607 с.*
7. *Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. [Текст] / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1974. – 176 с.*
8. *Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.*
9. *Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Физматгиз, 1959. – 608 с.*
10. *Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. Т. 1. [Текст] / В.Д. Черненко. – СПб.: Политехника, 2003. – 703 с.*
11. *Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное пособие) [Текст] / А.А. Савелов. – М.: Физматгиз, 1960. – 294 с.*
12. *Шикин Е.В. Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник. [Текст] / Е.В. Шикин, М.М. Франк-Каменецкий. – М.: Физматгиз, 1997. – 336 с.*
13. *Kock J. Konsevich's for Rational Plane Curves [Текст] / J. Kock, I. Vainsencher. – Resife, 1999. – 145 p.*


*Поступила в редколлегию 6.10.2015*

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

### ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ГЕОМЕТРІЇ ЕЛЕМЕНТАРНИХ КАТАСТРОФ. КАСПОЇДНІ КАТАСТРОФИ

В.Ю. Дубницький, О.І. Ходирєв

*Для каспоїдних катастроф типу складка, збірка першого типу, збірка другого типу, ластівчин хвіст, метелик першого типу, метелик другого типу, вігвам в явному вигляді визначено елементарні диференціально-геометричні характеристики, такі, як: відрізки дотичної, піддотичної, нормалі, піднормалі, кривизну і радіус кривизни катастрофи, координати центру її кривизни.*

***Ключові слова:*** *теорія катастроф, каспоїдні катастрофи, катастрофи типу: складка, збірка першого типу, збірка другого типу, ластівчин хвіст, метелик першого типу, метелик другого типу, вігвам, дотична, піддотична, нормаль, піднормаль, кривизна кривої, радіус кривизни, координати центру кривизни кривої.*

### APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL CALCULUS TO GEOMETRY OF ELEMENTARY CATASTROPHES. CASPOID CATASTROPHES

V.Yu. Dubnitskiy, A.I. Khodyrev

*For caspoid catastrophes of types: fold, first type gather, second type gather, dovetail, first type butterfly, second type butterfly, wigwam elementary differential geometric characteristics were determined explicitly, such as: sections of tangent, subtangent, normal, subnormal, curvature and curvature radius of catastrophe, its curvature center coordinates.*

***Keywords:*** *catastrophe theory, caspoid catastrophes, catastrophes of types: fold, first type gather, second type gather, dovetail, first type butterfly, second type butterfly, wigwam, tangent, subtangent, normal, subnormal, curve curvature, curvature radius, curve curvature center coordinates.*