УДК 515.164.15:517.925

В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев

Харьковский учебно-научный институт банковского дела ГВУЗ «Университета банковского дела», Харьков

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КАТАСТРОФ. ОМБИЛИЧЕСКИЕ КАТАСТРОФЫ

Предложено для омбилических катастроф определять элементарные дифференциально-геометрические характеристики их потенциальных функций такие, как: кривизна, радиус кривизны, координаты центра кривизны. Эти характеристики получены в явном виде для потенциальных функций катастроф, имеющих эллиптическую, гиперболическую, параболическую первого типа и гиперболическую второго типа омбилики.

Ключевые слова: *теория катастроф, потенциальные функции катастроф, омбилики, эллиптическая омбилика, гиперболическая омбилика, параболическая омбилика первого типа, гиперболическая омбилика второго типа, кривизна, радиус кривизны, центр кривизны.*

Введение

В данной работе продолжено рассмотрение простейших дифференциально-геометрических свойств катастроф, начатое в работе [1]. В ней были рассмотрены катастрофы каспоидного типа, то есть такие, уравнения которых представлены в явном виде. В данной работе рассмотрены катастрофы омбилического типа, то есть такие, уравнения которых представлены в неявном виде.

Анализ литературы. В соответствии с работами [2 – 6] представим катастрофу в виде многочлена не менее чем третьей степени:

$$G = V(X, C\ ),\ X = x_1,...x_j,...x_n;\ C = c_1,...c_\alpha, c_k, \quad (1)$$

зависящего от n переменных и дифференцируемого не менее двух раз. Примем, что $1 \le j \le n$ и $1 \le \alpha \le k$. Такой многочлен называют потенциальной функцией катастрофы. В условии (1) вектор переменных X называют вектором фазовых координат системы (1), вектор C называют вектором управляющих параметров этой же системы.

Выражение (1) называют потенциальной функцией катастрофы. Состояние равновесия системы (1) определяют из условия:

$$F(X, C) = \text{grad}V(X, C) = 0. \quad (2)$$

Решение этой системы относительно вектора переменных $X = X(C)$ определяет критические точки системы, определяемой условием (1). Задача элементарной теории катастроф состоит в изучении влияния изменения значений вектора управляющих параметров C на изменение вектора фазовых координат X системы (1). Для дальнейшего нам потребуются также неморсовы точки, определяющие множество сингулярности для системы (1). Их определяют по условию:

$$\det H(V(X, C)) = 0, \quad (3)$$

где $H(V(X, C))$ – гессиан функции $V(X, C)$. В табл. 1 приведены потенциальные функции катастроф омбилического типа основных, так называемых, элементарных катастроф. Их выражения заимствованы из работы [2, С. 161].

Таблица 1

Потенциальные функции омбилических катастроф

Тип омбилической катастрофы	Каноническая форма (потенциальная функция)
Эллиптическая омбилика	$V(x, y) = x^2y - y^3 + tx^2 + gy + hx$
Гиперболическая омбилика	$V(x, y) = x^2y + y^3 + tx^2 + gy + hx$
Параболическая омбилика первого типа	$V(x, y) = x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx$
Параболическая омбилика второго типа	$V(x, y) = (-1)\cdot(x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx)$
Вторая эллиптическая омбилика	$V(x, y) = x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$
Вторая гиперболическая омбилика	$V(x, y) = x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$
Символическая омбилика первого типа	$V(x, y) = x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx$
Символическая омбилика второго типа	$V(x, y) = (-1)\cdot(x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx)$

В работах по математическому анализу [7] и дифференциальной геометрии [8] сказано, что плоскую линию можно задать в неявном виде:

$$F(x, y) = 0. \qquad (4)$$

Для линий, заданных в неявном виде, в виде (5), из работ [7, 9, 11], известны следующие соотношения, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Основные дифференциально-геометрические характеристики для линий, заданных в неявном виде

№№ п/п	Наименование характеристики	Уравнение
1	Касательная в точке (x_0, y_0)	$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) = 0$
2	Нормаль в точке (x_0, y_0)	$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y}$
3	Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$	$K = \left\lvert \frac{D}{\left((F'_x)^2 + (F'_y)^2\right)^{3/2}} \right\rvert$
4	Радиус кривизны в произвольной точке $M(x, y)$	$R = \frac{1}{K}$
5	Координаты x_c, y_c центра С кривизны	$x_c = x - \frac{F'_x\left((F'_x)^2 + (F'_y)^2\right)}{D}; y_c = y + \frac{F'_y\left((F'_x)^2 + (F'_y)^2\right)}{D}$

В табл. 2 принято, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

В доступной авторам литературе, например [11, 12, 13, 14], аналитические выражения для определения этих свойств элементарных катастроф не найдены. Следует отметить, что определение уравнений касательной и нормали не вызывает затруднений, поэтому в рамках данной работы они не рассмотрены.

Постановка задачи. Для линий, соответствующих потенциальным функциям омбилических катастроф, определить выражения для кривизны кривой и координат центра кривизны**.**

Полученные результаты

В данной работе для катастроф, которые могут быть представлены на плоскости в виде неявных функций (омбилических катастроф), получены их дифференциально-геометрические характеристики, перечисленные в табл. 2. Для каждого типа катастроф сохранены обозначения, указанные в табл. 2, их область действия ограничена типом рассматриваемой катастрофы. Для сокращения объёма статьи все промежуточные выкладки не приведены. Общая схема выполнения исследования следующая.

Для катастрофы $V(x, y) = V$ и принадлежащей к одному из типов, указанных в табл. 1, определяют её гессиан

$$H = \begin{Vmatrix} F & S \\ S & W \end{Vmatrix} = H(x, y), \qquad (6)$$

где принято, что:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = S; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = F; \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = W. \qquad (9)$$

Для дальнейшего исследования полагают, что во всех случаях:

$$H(x, y) = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, решение поставленной задачи фактически свелось к вычислению характеристик кривизны уравнения линии, определяемой условием (10) и формулами, приведенными в табл. 2.

Для вычисления определителя (5) введём следующие обозначения. Примем, что:

$$D = \begin{Vmatrix} Q & P & R \\ P & M & N \\ R & N & O \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} H''_{xx} & H''_{xy} & H''_x \\ H''_{yx} & H''_{yy} & H''_y \\ H'_x & H'_y & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (11)$$

В условии (11) принято, что:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = Q; \qquad (12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = R; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y} = P; \qquad (14)$$

$$M = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = N. \qquad (16)$$

С учётом введенных обозначений получим, что кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$ будет равна:

$$K = \frac{D}{\left(R^2 + N^2\right)^{3/2}}. \qquad (17)$$

Координаты x_c, y_c центра C кривизны определяли по условиям:

$$x_c = x - \frac{R\left(R^2 + N^2\right)}{D}; \qquad (18)$$

$$y_c = y + \frac{N\left(R^2 + N^2\right)}{D}. \qquad (19)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА « ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА». Её уравнение имеет вид:

$$V = x^2 y - y^3 + tx^2 + gy + hx. \qquad (20)$$

Элементы гессиана H следующие:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = F = 2(y + t); \qquad (21)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = S = 2x; \qquad (22)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = W = -6y. \qquad (23)$$

Определитель гессиана

$$H = \begin{Vmatrix} F & S \\ S & W \end{Vmatrix} = -4\left[x^2 + 3y(y + t)\right]. \qquad (24)$$

Тогда элементы определителя D для гессиана H примут вид:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = Q = -8; \qquad (25)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = N = -12(2y + t); \qquad (26)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = M = -24; \qquad (27)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = P = 0. \qquad (28)$$

Определитель:

$$D = 1536x^2 + 1152y\left(2y + t^2\right). \qquad (29)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$ для катастрофы рассматриваемого типа будет равна:

$$K = \frac{D}{\left(R^2 + N^2\right)^{3/2}} = \frac{6\left[4x^2 + 3(2y + t)^2\right]}{\left[4x^2 + 9(2y + t)^2\right]^{3/2}}. \qquad (30)$$

Координаты x_c, y_c центра C кривизны для катастрофы рассматриваемого типа определяли по условиям:

$$x_c = \frac{2x\left(2y + t^2\right)}{4x^2 + 3\left(2y + t^2\right)} + \frac{4}{3}x; \qquad (31)$$

$$y_c = -\left[\frac{3\left(8x^3 + 12ty^2 + 6t^2 y + t^3\right)}{4x^2 + 3\left(2y + t^2\right)} + \frac{t}{2}\right]. \qquad (32)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА «ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА». Её уравнение имеет вид:

$$V = x^2 y + y^3 + tx^2 + gy + hx. \qquad (33)$$

Элементы гессиана H следующие:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = F = 2(y + t); \qquad (34)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = S = 2x; \qquad (35)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = W = 6y. \qquad (36)$$

Определитель гессиана:

$$H = \begin{Vmatrix} F & S \\ S & W \end{Vmatrix} = 12y(y + t) - 4x^2. \qquad (37)$$

Элементы определителя D для гессиана H примут вид:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = R = -8x; \qquad (38)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = Q = -8; \qquad (39)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = N = 12(2y + t); \qquad (40)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = M = 24; \qquad (41)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = P = 0. \qquad (42)$$

Определитель

$$D = 1152(2y + t)^2 - 1536x^2. \qquad (43)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$ для катастрофы рассматриваемого типа будет равна:

$$K = \frac{D}{\left(R^2 + N^2\right)^{3/2}} = \frac{6\left[3\left(2y + t^2\right) - 4x^2\right]}{\left[4x^2 + 9\left(2y + t^2\right)\right]^{3/2}}. \qquad (44)$$

Координаты x_c, y_c центра C кривизны для катастрофы рассматриваемого типа определяли по условиям:

$$x_c = \frac{2x}{3} - \frac{4x(2y + t)^2}{4x^2 - 3\left(2y + t^2\right)};$$

$$y_c = -\left[\frac{6\left(8y^3 + 12ty^2 + 6t^2y + t^3\right)}{4x^2 - 3(2y+t)^2} + \frac{t}{2}\right]. \quad (45)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА ПЕРВОГО ТИПА. Её уравнение имеет вид:

$$V = x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx\,. \quad (46)$$

Элементы гессиана H следующие:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F = 2(y+b)\,; \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = S = 2x\,; \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = W = 12y^2 + 2a = 2\left(6y^2 + a\right). \quad (49)$$

Определитель гессиана:

$$H = \begin{Vmatrix} F & S \\ S & W \end{Vmatrix} = 4(y+b)\left(6y^2+a\right) - 4x^2 = = 4\left[(y+b)\left(6y^2+a\right) - x^2\right]. \quad (50)$$

Элементы определителя D для гессиана H примут вид:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = R = -8x\,; \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = Q = -8\,; \quad (52)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = N = 4\left(18y^2 + 12by + a\right); \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = M = 48(3y+b)\,; \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = P = 0\,. \quad (55)$$

Определитель

$$D = 128\left(18y^2 + 12by + a\right)^2 - 3072x2(3y+b)\,. \quad (56)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x,y)$ для катастрофы рассматриваемого типа будет равна:

$$K = \frac{D}{(R2+N2)^{3/2}} = = \frac{2\left[\left(18y^2+12by+a\right)^2 - 24x^2(3y+b)\right]}{\left[4x2 + \left(18y^2+12by+a\right)^2\right]}. \quad (57)$$

Координаты x_c, y_c центра C кривизны для катастрофы рассматриваемого типа определяли по условиям:

$$x_c = \frac{2x\left[2x^2(18y+6b-1) - \left(18y^2+12by+a\right)^2\right]}{24x^2(3y+b) - \left(18y^2+12by+a\right)^2}\,; \quad (58)$$

$$y_c = = \frac{4x^2\left(18y^2-a\right) - \left(18y^2+12by+a\right)^2\left[18y^2+2y(6b+1)+a\right]}{2\left[24x^2(3y+b) - \left(18y^2+12by+a\right)^2\right]}. \quad (59)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА «ВТОРАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА». Её уравнение имеет вид:

$$V(x,y) = = x^2 + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx. \quad (60)$$

Элементы гессиана H следующие:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = F = 2(y+c)\,; \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 20y^3 + 6ax + 2b = W\,; \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = S = 2x\,. \quad (63)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = W = 12y^2 + 2a = 2\left(6y^2 + a\right). \quad (64)$$

Определитель гессиана H: примет вид:

$$H = 4(y+c)\left(10y^3 + 3ay + b\right) - 4x^2\,. \quad (65)$$

Элементы определителя D для гессиана H примут вид:

$$\frac{\partial j}{\partial x} = R = -8x\,; \quad (66)$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = -8 = Q\,; \quad (67)$$

$$\frac{\partial j}{\partial y} = N = 4\left(40y^3 + 30cy^2 + 6ay + 3ac + b\right); \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = M = 24\left(20y^2 + 10cy + a\right); \quad (69)$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y} = P = 0\,. \quad (70)$$

Определитель:

$$D = 128\left(40y^3 + 30cy^2 + 6ay + 3ac + b\right)^2 - = 1536x^2\left(20y^2 + 10cy + a\right). \quad (71)$$

Примем, что:

$$E = 40y^3 + 30cy^2 + 6ay + 3ac + b\,; \quad (72)$$

$$Z = 20y^2 + 10cy + a\,, \quad (73)$$

Тогда кривизна кривой в произвольной точке $M(x,y)$ для катастрофы рассматриваемого типа будет равна:

$$K = \frac{2\left[E^2 - 12x^2\left(20y^2 + 10cy + a\right)\right]}{\left(4x^2 + E^2\right)^{3/2}}. \quad (74)$$

Координаты x_c, y_c центра C кривизны для катастрофы рассматриваемого типа определяли по условиям:

$$x_c = x\left(1-\frac{1}{3z}\right)-\frac{x\left(60y^2+30cy+3a+1\right)E^2}{3z\left(12x^2z-E^2\right)}; \quad (75)$$

$$y_c = \frac{2y}{3}-\frac{c}{12}-\frac{2y\left(4a-5c^2\right)+5ac+2b}{12z}-Q_1. \quad (76)$$

В условии (76) принято, что:

$$Q_1 = \frac{\left(60y^2+30cy+3a+1\right)E^2}{12x^2Z^2-E^2}. \quad (77)$$

Получение в явном виде характеристик кривизны для оставшихся, из перечня приведенных в табл. 1, видов потенциальные функций омбилических катастроф нецелесообразно потому, что получаемые выражения излишне сложны для восприятия. Их изучение, по нашему мнению, возможно только численными методами.

Выводы

1. Предложено для омбилических катастроф определять такие элементарные дифференциально-геометрические характеристики, как кривизну и радиус кривизны катастрофы, координаты центра её кривизны.

2. Для потенциальных функций катастроф, имеющих эллиптическую, гиперболическую, параболическую первого типа, гиперболическую второго типа омбилики, получены в явном виде их основные дифференциально-геометрические характеристики.

3. Полученные результаты рекомендуется использовать при моделировании взрывных процессов различной природы.

Список литературы

1. Дубницкий В.Ю. Приложения дифференциального исчисления к геометрии элементарных катастроф. Каспоидные катастрофы. [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2015. – Вип. 11(136). – С. 119-124.

2. Постон Т. Теория катастроф и её приложения. [Текст] / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: «МИР», 1980. – 607 с.

3. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. [Текст] / Р. Гилмор // Кн. 1. – М.: «МИР», 1984. – 350 с., Кн. 2. – М.: «МИР», 1984. – 285 с.

4. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст] / Дж.М. Томпсон. – М.: «МИР», 1985. – 254 с.

5. Цветков В.И. Теория катастроф и фрактальная модель кризисных социально-экономических процессов. [Текст] / И.В. Цветков // Вестник ТвГУ. Серия: «Прикладная математика». – 2010. – Вып. 19. – С. 71-79.

6. Бекман И.Н. Катастрофы. Курс лекций. [Электронный ресурс] / И.Н. Бекман. – Режим доступа: http://beckuniver.ucoz.ru/Katastrofy/Katastrofy.htm / 19.07.2015 г. – Загл. с экрана.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3т. Т.1. [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматгиз, 1962. – 607 с.

8. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. [Текст] / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1974. – 176 с.

9. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

10. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Физматгиз, 1959. – 608 с.

11. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. Т. 1. [Текст] / В.Д. Черненко. – СПб.: Политехника, 2003. – 703 с.

12. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное пособие) [Текст] / А.А. Савелов. – М.: Физматгиз, 1960. – 294 с.

13. Шикин Е.В. Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник. [Текст] / Е.В. Шикин, М.М. Франк-Каменецкий. – М.: Физматгиз, 1997. – 336 с.

14. Kock J. Konsevich's for Rational Plane Curves [Текст] / J. Kock, I. Vainsencher. – Resife, 1999. – 145 p.

Поступила в редколлегию 30.10.2015

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ГЕОМЕТРІЇ ЕЛЕМЕНТАРНИХ КАТАСТРОФ. ОМБІЛИЧНІ КАТАСТРОФИ

В.Ю. Дубницький, О.І. Ходирєв

Запропоновано для омбілічних катастроф визначати елементарні диференціально-геометричні характеристики їх потенційних функцій такі, як: кривизна, радіус кривизни, координати центру кривизни. Ці характеристики отримані в явному вигляді для потенційних функцій катастроф, що мають еліптичну, гіперболічну, параболічну першого типу і гіперболічну другого типу омбілики.

Ключові слова: *теорія катастроф, потенційні функції катастроф, омбилики, еліптична омбілика, гіперболічна омбілика, параболічна омбилика першого типу, гіперболічна омбілика другого типу, кривизна, радіус кривизни, центр кривизни.*

APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL CALCULUS TO GEOMETRY OF ELEMENTARY CATASTROPHES. UMBILICAL CATASTROPHES

V.Yu. Dubnitskiy, A.I. Khodyrev

For umbilical catastrophes it is proposed to determine elementary differential geometric characteristics of their potential functions, such as curvature, radius of curvature, curvature center coordinates. Those characteristics were obtained in explicit form for potential functions of catastrophes which have elliptical, hyperbolic, parabolic first type and parabolic second type umbilicals.

Keywords*: theory of catastrophes, potential functions of catastrophes, umbilicals, elliptic umbilical, hyperbolic umbilical, parabolic first type umbilical, parabolic second type umbilical, curvature, radius of curvature, curvature center coordinates.*