УДК 519.7

ОПТИМАЛЬНЫЙ ОБМЕН ДАННЫМИ В МУЛЬТИПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ

Кондратьев В.Н., к.т.н. Богатов О.И., Тесля Е.В.
(представил д.т.н., проф. Г.А. Поляков)

Предложено обоснование организации оптимального по времени обмена между процессорными элементами в мультипроцессорной вычислительной системе (МВС) со структурой связей в виде **n** -мерного гиперкуба. Построен алгоритм нахождения параллельных обменов данными между процессорами, обеспечивающих общее оптимальное время обмена.

Структура связей между процессорными элементами (ПЭ) в МВС типа **n** - мерный гиперкуб считается одной из наиболее удобных для реализации параллельных алгоритмов, эффективные примеры которых для ряда конкретных задач приведены в [1]. В настоящей статье рассматривается вопрос организации оптимального по времени обмена данными между любыми ПЭ в МВС в самом общем виде независимо от свойств реализуемых задач. Критерий оптимальности, в соответствии с которым решается задача нахождения последовательности обменов между соответствующими ПЭ, определен следующим образом.

Пусть **MZ** - множество всех биективных отображений ($\mathbf{N=2^n}$) $\mathbf{f:\{0,1,\dots,N-1\}\to\{0,1,\dots,N-1\}}$ $\mathbf{N=2^n}$. Поставим во взаимно однозначное соответствие каждой вершине некоторого **n** - мерного гиперкуба, соответствующей ПЭ в МВС, число $\mathbf{i\in\overline{0,N-1}}$ в качестве ее номера. Согласно определению гиперкуба обмен данными между двумя ПЭ возможен лишь тогда, когда номера соответствующих вершин отличаются только одним двоичным разрядом (в дальнейшем – смежные вершины). Предполагается, что соответствующие ПЭ имеют тот же номер.

Будем говорить, что две смежные вершины (соответственно ПЭ) с номерами **i** и **j** имеют **k** - й индекс смежности, если имеет место

$$\mathbf{|i-j|=2^k} \quad \text{для} \quad \mathbf{0\le k\le n-1}.$$

Для каждого отображения $\mathbf{f\in MZ}$ его реализацией $\mathbf{RZ(f)}$ на **n** -мерном гиперкубе будем называть некоторую последовательность взаимных обменов данными между парами его ПЭ (с учетом указанных выше ограничений), в результате которых в каждом ПЭ с номером **i** будут находиться данные, бывшие ранее в ПЭ с номером $\mathbf{f(i)}$. Пусть **RZ** - множество всех таких реализаций, которые ставят в однозначное соответствие каждому

$f \in MZ$ определенную реализацию $RZ(f)$ на n - мерном гиперкубе. В этом случае RZ можно рассматривать как некоторый алгоритм, согласно которому строится каждая реализация $RZ(f)$ для всех $f \in MZ$. Пусть W - множество таких алгоритмов RZ, $T(RZ(f))$ - время, необходимое для реализации $RZ(f)$ отображения f на гиперкубе. В качестве критерия оптимальности по времени реализации примем

$$T_{\text{onm}} = \min_{RZ \in W} \max_{f \in MZ} T(RZ(f)), \tag{1}$$

согласно которому для каждого $f \in MZ$ при оптимальной реализации всегда имеет место $T(RZ(f)) \le T_{\text{опт}}$, причем существует такое f, для которого $T(RZ(f)) = T_{\text{опт}}$, и дальнейшее уменьшение $T_{\text{опт}}$ для реализации которого уже невозможно. Примем время параллельного обмена между смежными ПЭ за условную единицу. Тогда существует алгоритм $RZ_{\text{опт}}$, обеспечивающий выполнение (1), причем $T_{\text{опт}} = 2n-1$.

При такой постановке задачи удобным математическим аппаратом для исследования и анализа процессов обмена оказывается теория групп [2], благодаря чему был обоснован алгоритм нахождения оптимальной реализации, положенный далее в основу соответствующего пакета программ.

В соответствии с этим для всех $1 \le i \le N/2$ и $1 \le j \le n$ введем

$$q_{ij} = \left(\left\lfloor \frac{i-1}{2^{j-1}} \right\rfloor \cdot 2^j + (i-1) \bmod 2^{j-1} + 1 \quad \left\lfloor \frac{i-1}{2^{j-1}} \right\rfloor \cdot 2^j + 2^{j-1} + (i-1) \bmod 2^{j-1} + 1 \right) -$$

все транспозиции, соответствующие взаимному обмену данными между любыми двумя смежными вершинами гиперкуба, где $[a]$ - целая часть a. Очевидно, что $j-1$ является индексом смежности для соответствующей пары ПЭ, а i - порядковым номером в множестве транспозиций с указанным выше индексом смежности.

Введем далее для всех $1 \le j \le n$ обозначение

$$Q_j(\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_{N/2}) = q_{1j}^{\alpha_1} \cdot q_{2j}^{\alpha_2} \cdots q_{N/2,j}^{\alpha_{T/2}}, \tag{2}$$

где $\alpha_k \in \{0,1\}$, при $1 \le k \le N/2$, а $(ij)^1 = (ij)$, $(ij)^0 = e$ (e - единица симметрической группы). Выражение (2) определяет подстановки, соответствующие всем допустимым одновременным взаимным обменам данными на гиперкубе, т.е. они могут быть приняты в качестве порождающих элементов симметрической группы S_N, каждый из которых соответствует одновременному взаимному обмену данными между ПЭ с одинаковым индексом смежности.

Основной результат настоящей статьи, представленный в терминах подстановок, состоит в том, что любая подстановка $\sigma \in S_N$ (соответственно любой обмен данными между ПЭ) может быть представлена в виде

$$\sigma = Q_1(\beta_1) \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}(\beta_{n-1}) \cdot Q_n(\alpha_n) \cdot Q_{n-1}(\alpha_{n-1}) \cdot \ldots \cdot Q_1(\alpha_1), \tag{3}$$

где $\alpha_j = (\alpha_{1j}\,\alpha_{2j}\ldots\alpha_{N/2,j})$, $j = \overline{1,n}$;

$\beta_j = (\beta_{1j}\,\beta_{2j}\ldots\beta_{N/2,j})$, $j = \overline{1,n-1}$; $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \{0,1\}$.

Поскольку преобразования в группах с порождающими элементами типа подстановок $Q_j(\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_{N/2})$ с неизвестными заранее значениями $\alpha_i \in \{0,1\}$ в теории симметрических групп не рассматривались, то целесообразно перейти к изоморфным им группам перестановочных матриц, для которых соответствующие преобразования можно заменить обычными операциями умножения матриц. Этот изоморфизм устанавливается заданием для каждой подстановки $Q_t(\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_{N/2})$ перестановочной $N \times N$ - матрицы $A(n,\alpha)$, где вектор $\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2\ ...\alpha_{N/2})$. Каждый элемент a_{ij} этой матрицы определяется как

$$a_{ij} = \begin{cases} \overline{\alpha}_k, & i = j; \\ \alpha_k, & |i-j| = 2^{t-1}; \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $k = \left[(i-1)/2^t\right] \cdot 2^{t-1} + (i-1) \bmod 2^{t-1} + 1$; $\bar{\gamma}$ - логическое отрицание (инверсия) двузначной переменной γ. Тогда соответствующий (3) результат может быть представлен в виде перестановочной $N \times N$ - матрицы

$$\begin{aligned} Y = A_1(n,\beta_1) \times A_2(n,\beta_2) \times \ldots \times A_{n-1}(n,\beta_{n-1}) \times A_n(n,\alpha_n) \times \\ \times A_{n-1}(n,\alpha_{n-1}) \times \ldots \times A_2(n,\alpha_2) \times A_1(n,\alpha_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Возможность представления (4) основывается на том, что для любой перестановочной $N \times N$ - матрицы G имеет место

$$G = A_1(n,\beta) \times (U((n-1,1,0,F) + U(n-1,1,1,H)) \times A_1(n,\alpha), \quad (5)$$

где F и H - перестановочные $N/2 \times N/2$ - матрицы; α и β - некоторые $N/2-$мерные векторы с двоичными компонентами; $U(n,k,s,M)$ для любой $2^n \times 2^n$ - матрицы $M = \|m_{ij}\|$ определяется как $2^{n+k} \times 2^{n+k}$ – матрица $\|u_{pq}\|$, каждый элемент которой равен

$$u_{pq} = \begin{cases} m_{ij}, & p = (i-1) \cdot 2^k + s + 1,\ q = (j-1) \cdot 2^k + s + 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что матрица, представленная в (5) выражением $(U((n-1,1,0,F) + U(n-1,1,1,H))$, позволяет однозначно выделить из нее матрицы F и H, имеющие размерность $N/2$..Поэтому разрешимость (5) при заданном значении матрицы G относительно матриц F и H, а также векторов α и β, позволит, кроме определения значения векторов, свести задачу размерности $\mathbf{N}$ к двум отдельным задачам такого же типа, но имеющим вдвое меньшую размерность [3]. В конечном итоге задача сводится к $\mathbf{N/2}$ задачам размерности 2, решение которых достаточно тривиально. По ходу решения также определяются и все векторы α и β из (4).

Рассмотрим некоторые особенности решения (5) относительно $\mathbf{F}, \mathbf{H}, \alpha$ и β. Естественно, должны быть принципиально решены две задачи: обоснование разрешимости уравнения (5) для любых значений матрицы $\mathbf{G}$; построение алгоритма нахождения $\mathbf{F}, \mathbf{H}, \alpha$ и β для любого значения матрицы $\mathbf{G}$, в конечном итоге обеспечивающего оптимальное решение согласно критерия (1).

Представим матрицу $\mathbf{G}$ в виде

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{E_{11}} & \mathbf{E_{12}} & \cdots & \mathbf{E_{1,N/2}} \\ \mathbf{E_{21}} & \mathbf{E_{22}} & \cdots & \mathbf{E_{2,N/2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E_{N/2,1}} & \mathbf{E_{N/2,2}} & \cdots & \mathbf{E_{N/2,N/2}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{E_{ij}} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_j \overline{\beta}_i \mathbf{f_{ij}} \vee \alpha_j \beta_i \mathbf{h_{ij}} & \alpha_j \overline{\beta}_i \mathbf{f_{ij}} \vee \overline{\alpha}_j \beta_i \mathbf{h_{ij}} \\ \overline{\alpha}_j \beta_i \mathbf{f_{ij}} \vee \alpha_j \overline{\beta}_i \mathbf{h_{ij}} & \alpha_j \beta_i \mathbf{f_{ij}} \vee \overline{\alpha}_j \overline{\beta}_i \mathbf{h_{ij}} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а $\mathbf{f_{ij}}$ и $\mathbf{h_{ij}}$ - соответствующие элементы матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$.

Тогда решение уравнения (5) относительно $\mathbf{F}, \mathbf{H}, \alpha$ и β будет сводиться к решению системы $\mathbf{N^2}$ булевых уравнений, полученных из (6) и (7). Для эффективного решения такой задачи следует воспользоваться методом сопровождающих функций [4], в данном случае представленных функциями трехзначной логики, который, с одной стороны, позволяет показать, что (5) всегда разрешимо и, с другой стороны, дает возможность, в общем виде найти некоторую последовательность определения всех ненулевых элементов матриц **F, H** и всех значений компонент векторов α и β соответственно.

Алгоритм сводится к последовательному просмотру единичных элементов матрицы $\mathbf{G}$ в следующем порядке. Пусть ранее на шаге $\mathbf{r}$ алгоритма рассматривался элемент $\mathbf{g_{ij}=1}$ (для определенности примем, что $\mathbf{r\text{-}1 \equiv 0 (mod 2)}$). Тогда индексы следующего единичного элемента $\mathbf{g}_{\mathbf{k}l}\mathbf{=1}$, подлежащего просмотру на ($\mathbf{r+1}$) - м шаге, определяются как:

$$l = \left\lfloor \frac{\mathbf{j-1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor \cdot \mathbf{2} + \overline{\mathbf{(j-1) \bmod 2}} + \mathbf{1}; \quad \mathbf{k = g^{-1}}(l\mathbf{-1}) + \mathbf{1}.$$

Предполагается, что для всех $\mathbf{i,j}$ $\mathbf{g_{ij}=1}$ эквивалентно $\mathbf{j-1=g(i-1)}$. При этом индексы соответствующих единичных элементов $\mathbf{f_{st}}$ и $\mathbf{h_{uv}}$ матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$ будут равны:

$$s=\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor+1;\quad t=\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor+1;\quad u=\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor+1;\quad v=\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor+1.$$

Соответственно определяются компоненты векторов:

$$\beta_s=\begin{cases}(i-1) \bmod 2, & r\equiv 1 \pmod 2;\\ (k-1) \bmod 2, & r\equiv 0 \pmod 2;\end{cases}\qquad \alpha_t=\begin{cases}(j-1) \bmod 2, & r\equiv 1 \pmod 2;\\ (l-1) \bmod 2, & r\equiv 0 \pmod 2).\end{cases}$$

Переход к очередному единичному значению $g_{pq}=1$ на ($r+2$) - м шаге осуществляется для следующих значений индексов:

$$p=[(k-1)/2]\cdot 2+\overline{(k-1) \bmod 2}+1;\quad q=g(p-1)+1,$$

после чего процесс повторяется сначала до выполнения условия $p=i$, где i - значение индекса первого единичного элемента матрицы G, с которого начинался данный процесс. Если при этом были перебраны не все единичные элементы матрицы G, то процесс повторяется с новыми значениями индекса i, значение которого выбирается как наименьшее из числа индексов всех невыбранных ранее единичных элементов. Построение алгоритма позволяет гарантировать, что такие явления, как зацикливание, при этом исключаются, и что алгоритм в любом случае приводит к решению (5).

Оптимальность по времени в соответствии с принятым критерием обосновывается следующим образом. Рассматривается конкретный пример обмена, которому соответствует некоторый элемент из симметрической группы S_N, для которого можно показать, что представление его в терминах подстановок (2) не может быть выполнено менее, чем за $2n-1$ последовательных применений подобных подстановок. С другой стороны, из представления (4) следует, что реализация любого примера может быть выполнена за время, не большее, чем $2n-1$ шаг, откуда и следует оптимальность (4) в соответствии с принятым критерием (1). (Время, меньшее времени $2n-1$ шагов, получается в том случае, когда для каких-либо j имеет место $A_j(n,\alpha_j)=I_N$ или $A_j(n,\beta_j)=I_N$, где единичная матрица порядка N обозначена как I_N).

ЛИТЕРАТУРА

1. Foster I.. Designing and Building Parallel Programms. Addison-Wesley, 1995. – 326 p.

2. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 520 с.

3. Кун С. Матричные процессоры на СБИС. – М.: Мир, 1991. – 234 с.

4. Кондратьев В.Н., Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. О преобразовании сложных регулярных логических схем // ДАН СССР. – 1990. – Т. 312, № 4. – С. 808 - 814.