УДК 621.391

# ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ В АМПЛИТУДНОМ КВАНТОВАНИИ

к.т.н. И.П. Кнышев
(представил д.т.н., проф. П.Ф. Поляков)

Сформулировано расширение теоремы Котельникова на амплитудное квантование сигналов. Получено условие выбора интервала квантования. Показаны возможные источники погрешности для реальных условий.

Преобразование сигналов в цифровую форму осуществляется в аналого - цифровом преобразователе (АЦП) путем временнóй дискретизации и амплитудного квантования. В основе дискретизации лежит теорема отсчетов (Котельникова), определяющая требования к интервалу взятия отсчетов $\mathbf{\Delta_t}$ во времени, сигналу и устройству восстановления и обеспечивающая идеальное восстановление сигнала [1]. Амплитудное квантование обычно рассматривается как процесс прохождения сигнала через устройство со ступенчатой амплитудной характеристикой, считающееся линейным и вносящим шум квантования [2].

Фактически дискретизация и квантование – это один и тот же процесс перехода от континуального множества значений некоторого параметра сигнала (времени, напряжения, тока, фазы и т.п.) к счетному множеству. Поэтому теорема Котельникова может быть распространена и на амплитудное квантование. О такой возможности для случайных сигналов говорится в работе [2].

Амплитудному квантованию подвергаются, как правило, отсчеты $\boldsymbol{\xi_k = \xi(k\Delta_t)}$ некоторого случайного процесса $\boldsymbol{\xi(t)}$, получаемые из его выборок в моменты $\mathbf{k\Delta_t}$, $\mathbf{|k|} \in \{\mathbf{0; 1; 2; \ldots}\}$. При этом полагается, что квантуемый процесс удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова. Это означает, что его энергетический спектр ограничен некоторой частотой $\mathbf{F_m}$ и интервал временной дискретизации удовлетворяет условию $\mathbf{\Delta_t \le 1/2F_m}$.

Исходный процесс $\boldsymbol{\xi(t)}$ описывается функцией распределения плотности вероятности $\mathbf{W_\xi(x)}$, которой соответствует [3] характеристическая функция

$$\boldsymbol{\theta_\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) e^{j\lambda x} dx}. \tag{1}$$

В результате дискретизации и квантования в $\boldsymbol{\nu}$ - разрядном АЦП с характеристикой, описываемой вектором входных уровней сравнения $\mathbf{U} = \left\{\mathbf{u}_\ell, \ell \in \overline{\mathbf{1, N_\nu}}; \mathbf{u_0} = -\infty; \mathbf{u_{N\nu+1}} = +\infty\right\}$, получаем случайный процесс $\boldsymbol{\varsigma(k\Delta_t)}$, значения которого определяются множеством $\mathbf{V} \in \left\{ \mathbf{v}_{\ell}, \quad \ell \in \overline{\mathbf{1}, \mathbf{N}_{\upsilon} + \mathbf{1}} \right\}$ выходных уровней состояния, где

$$\mathbf{N}_{\nu} = \begin{cases} \mathbf{2}^{\nu} - \mathbf{1}, & \text{нечетный} \quad \mathbf{АЦП}; \\ \mathbf{2}^{\nu} - \mathbf{2}, & \text{четный} \quad \mathbf{АЦП}. \end{cases}$$

Распределение вероятности процесса $\boldsymbol{\varsigma}(\mathbf{k}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{t}})$ по элементам множества $\mathbf{V}$ могут быть найдены как вектор

$$\mathbf{P}_{\varsigma} \in \left\{ \mathbf{p}_{\ell} = \int\limits_{\mathbf{u}_{\ell-1}}^{\mathbf{u}_{\ell}} \mathbf{W}_{\xi}(\mathbf{x})\mathbf{dx}, \quad \ell \in \overline{\mathbf{1}, \mathbf{N}_{\upsilon} + \mathbf{1}} \right\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}_{\ell}$ – входные уровни сравнения АЦП.

Если при квантовании используется гипотетический АЦП с числом входных уровней сравнения $\mathbf{N}_{\nu} \to \infty$ и постоянным шагом $\mathbf{u}_{\ell} - \mathbf{u}_{\ell-1} = \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}_{\ell} = \ell\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}}$, $|\ell| \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$. Тогда, при достаточно малом $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}}$, вектор (2) можно представить в виде «непрерывной» функции

$$\mathbf{P}_{\varsigma}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}} \mathbf{W}_{\xi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x} - \ell\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}}), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x} - \ell\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}})$ – дельта-функция в точке $\mathbf{x} = \ell\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}}$.

Характеристическую функцию $\boldsymbol{\theta}_{\varsigma}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda})$ случайного процесса с распределением вероятности (3) можно найти как свертку характеристических функций исходного процесса $\boldsymbol{\theta}_{\xi}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda})$ и периодической последовательности $\boldsymbol{\delta}$ - функций с периодом $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}}$ – $\boldsymbol{\theta}_{\delta}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda})$:

$$\boldsymbol{\theta}_{\varsigma}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\theta}_{\xi}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda}) * \boldsymbol{\theta}_{\delta}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda}), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\theta}_{\delta}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ell / \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}})$.

Функция $\boldsymbol{\theta}_{\delta}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda})$ имеет дискретный характер, поэтому свертку (4) можно представить в виде

$$\boldsymbol{\theta}_{\varsigma}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\theta}_{\xi}[\mathbf{j}(\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ell / \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}})]. \tag{5}$$

Если характеристическая функция $\theta_{\xi}(j\lambda)$ не содержит составляющих со значениями выше $\Lambda_{m}$:

$$\boldsymbol{\theta}_{\xi}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \boldsymbol{\theta}_{\xi 0}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda}), & |\boldsymbol{\lambda}| \le \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{m}}; \\ \mathbf{0}, & |\boldsymbol{\lambda}| \ge \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{m}}, \end{cases} \tag{6}$$

а интервал $\Delta_{u}$ выбран из условия

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}} \le \boldsymbol{\pi} / \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{m}}, \tag{7}$$

то парциальные составляющие в сумме (5) не перекрываются и характеристическая функция $\boldsymbol{\theta}_{\varsigma}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda})$ представляет собой бесконечную последовательность функций $\boldsymbol{\theta}_{\xi}(\mathbf{j}\boldsymbol{\lambda})$, смещенных по оси $\boldsymbol{\lambda}$ на величину $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ell / \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{u}}$.

На рис. 1, а для исходного случайного процесса со следующим распределением $W_\xi(x) = \dfrac{1-\cos(\vartheta x)}{\pi\vartheta x^2}$, где $\vartheta$ – параметр, показана функция $\theta_\xi(j\lambda) = \begin{cases} 1-|\lambda|/\vartheta, & |\lambda| \le \vartheta; \\ 0, & |\lambda| > \vartheta, \end{cases}$ [3], на рис. 1,б – преобразование Фурье периодической последовательности $\delta$ - функций с периодом $\Delta_u<\pi/\vartheta$ и на рис. 1,в – результат их свертки.

Характеристическая функция суммы двух независимых случайных процессов равна произведению характеристических функций слагаемых [3]. Поэтому можно восстановить исходный непрерывный случайный процесс $\xi(k\Delta_t)$, если квантованный процесс $\varsigma(k\Delta_t)$ просуммировать с независимым случайным процессом $\eta_в(t)$, имеющим характеристическую функцию вида

$$\theta_\eta(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| \le \pi/\Delta_u; \\ 0, & |\lambda| > \pi/\Delta_u. \end{cases} \qquad (8)$$

После суммирования $\varsigma(k\Delta t) + \eta(k\Delta t) = \tilde{\xi}(k\Delta_t)$ получаем характеристическую функцию $\theta_в(j\lambda) = \theta_\varsigma(j\lambda)\theta_\eta(j\lambda)$, которой соответствует функция распределения плотности вероятности $W_в(x) = W_\xi(x)$.

На рис. 1,г изображена характеристическая функция вида (8) и на рис. 1,д – характеристическая функция восстановленного сигнала.

Таким образом, теорема Котельникова может быть распространена на амплитудное квантование случайных процессов в следующей формулировке.

Если характеристическая функция $\theta(j\lambda)$ случайного процесса не имеет составляющих выше $\Lambda_m$, то его функция распределения плотности вероятности полностью определяется своими значениями $W(\ell\Delta_u)$, $|\ell|\in\{0; 1; 2; \ldots\}$, полученными с интервалом $\Delta_u \le \pi/\Lambda_m$. Для восстановления исходного распределения необходимо просуммировать квантованный случайный процесс и независимый случайный процесс с характеристической функцией вида (8).

Теорема будет справедлива при выполнении ряда условий.

- Характеристическая функция $\theta(j\lambda)$ должна быть равно нулю вне интервала $[-\Lambda_m; \Lambda_m]$.
- АЦП должен иметь бесконечно большое число уровней сравнения (бесконечно большую разрядность). При ограниченной характеристической функции распределение плотности вероятности будет не усеченным, поэтому число значений (отсчетов) должно быть бесконечно большим.
- Отсчеты функции $W(\ell\Delta_u)$ должны быть получены для бесконечно малых окрестностей точек $\ell\Delta_u$, $|\ell|\in\{0; 1; 2; \ldots\}$ (в виде $\delta$ - функций).
- Интервалы квантования $\Delta_u = u_\ell - u_{\ell-1}$, $|\ell|\in\{0; 1; 2; \ldots\}$ должны быть одинаковыми и удовлетворять условию $\Delta_u \le \pi/\Lambda_m$.

- Восстанавливающий случайный процесс должен быть независимым с характеристической функцией вида (8).

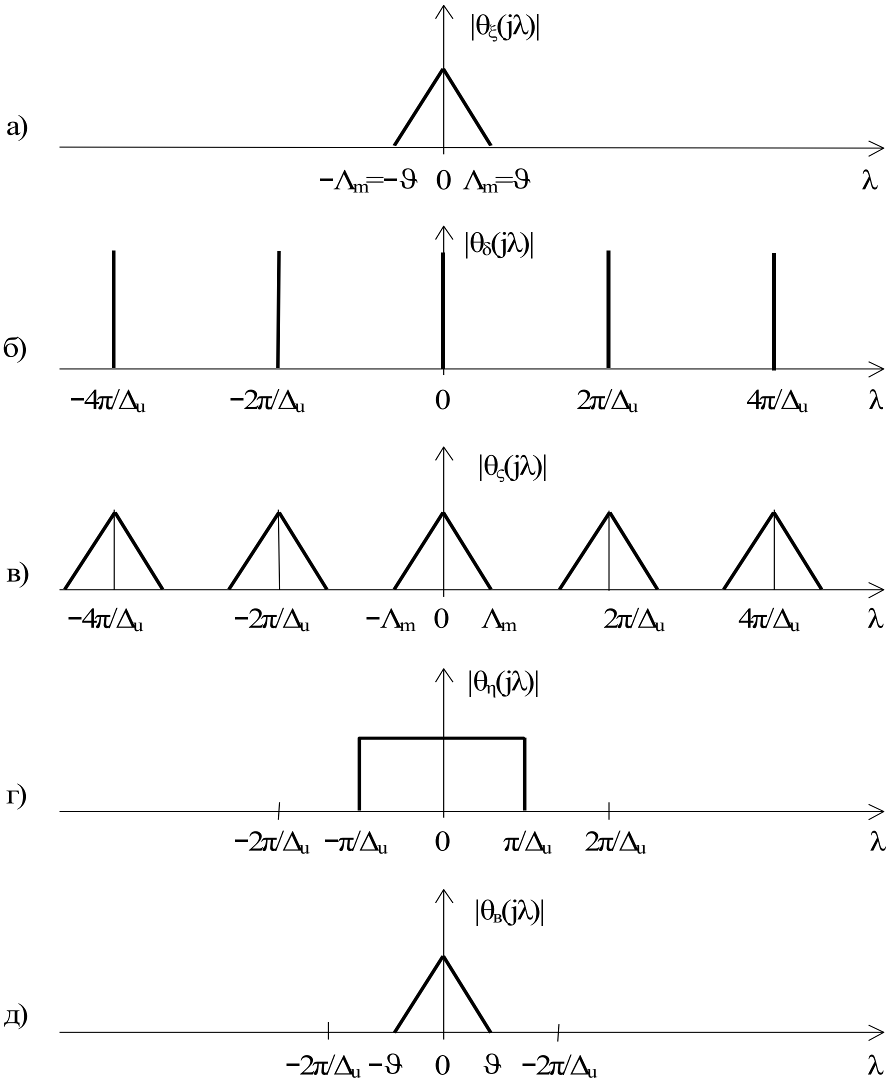


Рис.1. Графики характеристических функций

Все эти условия физически нереализуемы, поэтому амплитудное квантование в реальных системах будет сопровождаться ошибками (погрешностями) восстановления.

Конечное число отсчетов функции $\mathbf{W(x)}$ (конечная разрядность $\boldsymbol{\nu}$) приведёт к появлению ошибки ограничения, которая уменьшается с ростом разрядности и динамического диапазона АЦП $\mathbf{D = u_{N\nu} - u_1}$.

Наличие у характеристической функции квантуемого сигнала составляющих выше $\boldsymbol{\pi/\Delta_u}$ приведёт к появлению ошибки наложения, величина которой уменьшается с уменьшением $\boldsymbol{\Delta_u}$ . Для неограниченной функции $\boldsymbol{\theta_\xi(j\lambda)}$ можно определить эффективную ширину $\boldsymbol{\Lambda_{эфф}}$, которая равна

$$\Lambda_{эфф} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\theta(j\lambda)d\lambda \Big/ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta^2(j\lambda)d\lambda} \;.$$

Тогда, для обеспечения малого уровня ошибок необходимо выполнить условие

$$\Delta_u < \pi/\Lambda_{эфф}.$$

Отличие характеристической функции восстанавливающего процесса от идеальной (8) обусловит появление искажений, которые можно представить в виде двух слагаемых. Одно из слагаемых – это остатки парциальных составляющих (5) при $|\ell| \geq 1$, уменьшающиеся при уменьшении интервала $\boldsymbol{\Delta_u}$ . Другое слагаемое – это искажение исходной характеристической функции (6) за счет неравномерности характеристической функции восстанавливающего процесса. С уменьшением $\boldsymbol{\Delta_u}$ требования к восстанавливающему процессу снижаются.

Таким образом, выбором параметров квантизатора и восстанавливающего процесса величину ошибки можно сделать сколь угодно малой, приближаясь к требованиям идеального квантования.

Рассмотренная теорема отсчетов может быть распространена и на амплитудное квантование детерминированных сигналов, если воспользоваться функциями распределения по уровням $\mathbf{Wd(x)}$ [4] и соответствующими им характеристическими функциями (1).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Игнатьев Н.К. Дискретизация и её приложения. – М.: Связь, 1980. – 264 с.
2. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Сов. радио, 1974. – 432 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятности и её приложения. – М.: Мир, 1984. – Т.2. – 751 с.
4. Кнышев И.П. Функции распределения детерминированных сигналов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 1999. – Вип. 2(6). – С. 176 - 180.


*Поступила в редколлегию 3.7.2000*