УДК 623.021:005

ПЛАНУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ЗАСОБІВ У ЗАДАЧАХ ПОШУКУ

к.т.н. В.Б. Кононов, к.в.н. В.В. Ткачов
(подав д.т.н., проф. В.І. Карпенко)

В статті розглядається загальне формулювання задачі розподілення неоднорідних засобів оперуючої сторони в умовах, коли відомі ймовірності знаходження об‘єкта в районах пошуку.

Задачі оптимального розподілення неоднорідних засобів по об‘єктах, як правило, мають різноманітний характер, що значно ускладнює розробку універсального алгоритму їх розв‘язання [1, 2]. Але є клас задач нелінійного програмування, до якого відносяться досить загальні задачі пошуку і для вирішення яких може бути використано ефективний алгоритм.

Розглянемо досить загальну постановку задачі оптимального розподілення неоднорідних засобів у районах пошуку.

Оперуюча сторона **А** має деяку кількість різнорідних засобів пошуку, яку треба розповсюдити по районах з метою виявлення об’єкта сторони **В**. У оперуючої сторони **А** є дані про ймовірності виявлення об’єкта сторони **В** у будь - якому з районів кожної одиниці засобів пошуку та про ймовірності перебування об’єкта у будь - якому з районів пошуку.

Потрібно розподілити існуючі засоби по районах пошуку, щоб максимізувати повну ймовірність виявлення об’єкта.

Для розв‘язання цієї задачі побудуємо математичну модель оптимального розподілення. Введемо у розгляд такі позначення [2, 3]:

$\mathbf{m}$ - кількість типів засобів пошуку;

$\mathbf{n}$ - кількість районів пошуку;

$\mathbf{i}$ - номер типу засобу пошуку ($\mathbf{i = \overline{1,m}}$);

$\mathbf{j}$ - номер району пошуку ($\mathbf{j = \overline{1,n}}$)

$\mathbf{A_i}$ - кількість засобів пошуку $\mathbf{i}$ - го типу;

$\mathbf{p_{ij}}$ - умовна ймовірність виявлення об’єкта $\mathbf{i}$ - м засобом пошуку в $\mathbf{j}$ - му районі;

$\mathbf{p_j}$ - імовірність перебування об’єкта в $\mathbf{j}$ - му районі;

$\mathbf{X = \|x_{ij}\|_{m,n}}$ - шуканий план розподілення неоднорідних засобів пошуку.

Обгрунтуємо критерій ефективності математичної моделі оптимального розподілення так:

$\mathbf{1 - p_{ij}}$ - умовна ймовірність невиявлення об'єкта в $\mathbf{i}$ - му районі однією одиницею $\mathbf{j}$ - го типу;

$\left(1-p_{ij}\right)^{x_{ij}}$ - умовна ймовірність невиявлення об'єкта в $\mathbf{j}$ - му районі x_{ij} - кількістю засобів пошуку $\mathbf{i}$ -го типу;

$\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-p_{ij}\right)^{x_{ij}}$ - умовна ймовірність невиявлення об'єкта в $\mathbf{j}$ - му районі згідно з кількостями засобів пошуку $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}$;

$1-\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-p_{ij}\right)^{x_{ij}}$ - умовна ймовірність виявлення об'єкта в $\mathbf{j}$ - му районі за попереднім розподіленням;

$P(X)=\sum\limits_{j=1}^{n} P_j[1-\prod\limits_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{x_{ij}}]$ - повна ймовірність виявлення об'єкта згідно з планом розподілення $\mathbf{X}$.

Обмеження на шукані змінні складаються з обмеження на кількості засобів пошуку кожного з типів

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i, \ i=\overline{1,m}$$

та обмежень щодо невід'ємності і цілочисельності засобів пошуку

$$x_{ij} = \left[x_{ij}\right] \ge 0, \ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} .$$

Для подібних задач у якості критерію слід вибирати критерій максимального результату.

Таким чином, остаточно математична модель розглядаємої задачі виглядає так:

$$P(X)=\sum_{j=1}^{n} P_j[1-\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{x_{ij}}] \to \max \ ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i, \quad i=\overline{1,m} \ ; \tag{1}$$

$$x_{ij} = \left[x_{ij}\right] \ge 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n} .$$

Проведемо аналіз співвідношень задачі (1). Для цього перетворимо цільову функцію математичної моделі (1):

$$P(X)=\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{j=1}^{n}p_j\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{x_{ij}}=$$

$$=1-\sum_{j=1}^{n}p_j\prod_{i=1}^{m}e^{x_{ij}\ln(1-p_{ij})}=1-\sum_{j=1}^{n}p_j\exp\left(-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}\right),$$

де $a_{ij}=-\ln(1-p_{ij})\geq 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$.

Очевидно, що обмеження на кількість існуючих засобів пошуку у моделі (1) є рівностями

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=A_i,\quad (i=\overline{1,m}).$$

Тому задача (1) спростовується до вигляду:

$$Q(X)=\sum_{j=1}^{n}p_j\exp\left(-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}\right)\rightarrow\min;$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=A_i,\quad i=\overline{1,m};\qquad (2)$$

$$x_{ij}\geq 0;\quad i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n},$$

де $Q(X)$ - повна ймовірність невиявлення об'єкта згідно плану розподілення X.

Розглянемо задачу (2) без урахування умов на цілочисельність змінних:

$$Q(X)=\sum_{j=1}^{n}p_j\exp\left(-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}\right)\rightarrow\min;$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=A_i,\quad i=\overline{1,m};\qquad (3)$$

$$x_{ij}=[x_{ij}]\geq 0;\quad i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}$$

і доведемо, що це задача опуклого програмування.

Твердження 1. Задача (3) є задачею опуклого програмування.

Доведення. Опуклість допустимої множини очевидна [4], оскільки допустима множина – це перетин кінцевого числа гіперплощин і півпросторів.

Доведемо спочатку строгу опуклість функцій

$$\mathbf{L_j(X) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}\right)}.$$

Нехай плани розподілення $\mathbf{X^{(1)}}$ та $\mathbf{X^{(2)}}$ задовольняють умовам задачі (3), тоді їх опукла комбінація $\mathbf{\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2}$, $\mathbf{\alpha \in [0,1]}$ також задовольняє умовам задачі (3). Отже

$$\mathbf{L_j\left[\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2\right] = \exp\left(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left[\alpha x_{ij}^{(1)} + (1-\alpha)x_{ij}^{(2)}\right]\right) < \alpha\sum_{j=1}^{n} p_j L_j\left(X^1\right) =}$$

$$\mathbf{= \exp\left(\alpha\sum_{i=1}^{m}\left(-a_{ij}x_{ij}^{(1)}\right) + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{m}\left(-a_{ij}x_{ij}^{(2)}\right)\right) = e^{\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2}},$$

де $\mathbf{z_1 = \sum_{i=1}^{m}\left(-a_{ij}x_{ij}^{(1)}\right)}$; $\quad \mathbf{z_2 = \sum_{i=1}^{m}\left(-a_{ij}x_{ij}^{(2)}\right)}$.

Тому що функція $\mathbf{e^z}$ – строго опукла, то

$$\mathbf{e^{\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2} < \alpha e^{z_1} + (1-\alpha)\cdot e^{z_2} = \alpha L_j\left(X^1\right) + (1-\alpha)\cdot L_j\left(X^2\right)}.$$

Таким чином, функції $\mathbf{L_j(X)}$ - строго опуклі. Тоді функція

$$\mathbf{Q(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j L_j(X)}$$

є строго опуклою, тому що це лінійна комбінація з невід'ємними коефіцієнтами строго опуклих функцій

$$\mathbf{Q\left[\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2\right] = \sum_{j=1}^{n} p_j L_j\left[\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2\right] +}$$

$$\mathbf{+ (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} p_j L_j\left(X^2\right) = \alpha Q(X^1) + (1-\alpha)Q(X^2)}.$$

Твердження 2. Задача (3) завжди має рішення, до того ж єдине.

Доведення. Існування рішення задачі (3) прямує з теореми Вейерштрасса [5], бо функція **Q(X)** неперервна на замкненій та обмеженій множині. Єдиність рішення витікає з строгої опуклості функції **Q(X)**.

Таким чином, якщо буде розроблений ефективний алгоритм пошуку точки мінімуму функції **Q(X)** на допустимій множині задачі (3), то з твердження 2 витікає, що вона є єдиним оптимальним планом задачі (3), а також оптимальним нецілочисельним планом вихідної задачі (1):

$$\mathbf{X}^* = \arg\min_{\mathbf{D}} \mathbf{Q}(\mathbf{X}) = \arg\max_{\mathbf{D}} \mathbf{P}(\mathbf{X}),$$

де **D** - допустима множина задачі (3), або задач (1) та (2) без врахуванням умов на цілочисельність. Максимум повної ймовірності буде дорівнювати $\mathbf{P}(\mathbf{X}^*)$.

Побудована загальна математична модель оптимального розподілення неоднорідних засобів у районах пошуку дозволяє описувати у формалізованому вигляді широкий клас різних задач розподілення.

Розглянута задача є задачею цілочисельного програмування і може бути вирішена за методом динамічного програмування, якщо кількість типів засобів пошуку невелика. Якщо кількість типів засобів пошуку велика, цю задачу можна перетворити у задачу опуклого програмування без урахування умов на цілочисельність змінних. Такий підхід дає змогу побудувати алгоритм розв'язання цієї задачі практично без обмеження на кількість типів засобів пошуку на основі методу можливих напрямків із подальшим дослідження щодо округлення змінних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушнерук Ю.І., Кононов В.Б., Євстрат Д.І. Оптимальне планування процесів пошуку системи // Ракетно - космічна техніка. – Харків : ХВУ. – 1999. – Вип. 1. – С. 157 - 160.

2. Абчук В.А., Сузель В.Г. Поиск объектов. - М: Сов. радио, 1977. – 179 с.

3. Основы исследования операций в военной технике / Под ред. Ю.В. Чуева – М.: Сов. радио, 1965. – 383 с.

4. Исследование операций / Под ред. Дж.Моудера, С. Элмаграби – М.: Мир, 1981. – 596 с.

5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I. – М.: Наука, 1969. – 607 с.

Надійшла до редколегії 4.9.2000