УДК 681.511

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

к. ф.-м.н. Д.В. Дмитришин, д.т.н. В.М. Вартанян, к ф.-м.н. Г.М. Вартанян

Рассматриваются вопросы устойчивости механических систем с наследственностью. Задача сведена к проблеме устойчивости некоторого семейства квазиполиномов. Сформулированы необходимые и достаточные условия устойчивости всех квазиполиномов этого семейства.

Исследование устойчивости колебательного режима механической системы сводится к анализу расположения на комплексной плоскости нулей полинома $\varphi(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_2$, где a_1 – величина диссипативного коэффициента; a_2 – величина, обусловленная упругими свойствами системы.

Предположим, что упругая сила действует не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени τ. Тогда при решении задачи устойчивости вместо полинома $\varphi(\lambda)$ необходимо рассматривать квазиполином

$$f(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_2\int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma}dg(\sigma),$$

где $g(\sigma)$ – функция ограниченной вариации на $[0,1]$, моделирующая закон затухания «памяти» упругой силы.

Будем считать, что функция $g(\sigma)$ не известна априори. В случае, когда $g(\sigma)$ представима в виде линейной комбинации тригонометрических, экспоненциальных, кусочно - линейных или других легко исследуемых функций, проблема анализа устойчивости квазиполиномов $f(\lambda)$ сводится к известным задачам. При этом, $f(\lambda)$ зависит только от конечного числа неопределенных параметров.

Рассмотрим случай, когда функция g принадлежит множеству

$$G=\left\{g \,\middle|\, \int_0^1 dg(\sigma)=L,\ \int_0^1 \left|dg(\sigma)\right| \le 1 \right\}.$$

В дальнейшем, для определенности, будем считать, что $g(0)=0$.

Такая постановка задачи приводит к исследованию устойчивости целого семейства квазиполиномов

$$\mathbf{H}=\left\{\mathbf{f}\;\middle|\;\mathbf{f}(\lambda)=\lambda^2+\mathbf{a}_1\lambda+\mathbf{a}_2\int_0^1 \mathbf{e}^{-\lambda\tau\sigma}\mathbf{d}\mathbf{g}(\sigma),\ \mathbf{g}(\sigma)\in\mathbf{G}\right\}.$$

Будем говорить, что квазиполином $\mathbf{f}(\lambda)$ устойчив, если все его нули лежат в открытой левой полуплоскости комплексного переменного λ. В этом и только в этом случае соответствующая система линейных дифференциальных уравнений оказывается устойчивой [1]. Основным критерием устойчивости заданного квазиполинома является теорема Понтрягина Л.С. [2]. Если квазиполином зависит от конечного числа неопределенных параметров то, при небольшом их количестве, эффективным инструментом анализа устойчивости являются методы D – разбиения Неймарка Ю.И. [3] и амплитудно - фазовый Цыпкина Я.З. [4]. Если же число неопределенных параметров велико, то необходимо применять другие методы [5 – 9].

Квазиполиномы из семейства $\mathbf{H}$ зависят от более, чем счетного множества неопределенных параметров. Поэтому требуются новые подходы к решению задачи устойчивости семейства $\mathbf{H}$.

Сформулируем необходимые предварительные результаты.

Лемма 1. Множество решений $\mathbf{g}$ системы

$$\begin{cases}\int_0^1 \mathbf{d}\mathbf{g}(\sigma)=1;\\ \int_0^1 (1-\cos\varphi\sigma)\mathbf{d}\mathbf{g}(\sigma)=\mathbf{r},\end{cases} \tag{1}$$

где $0\le\varphi\le\pi$, $1-\cos\varphi\le\mathbf{r}\le1$, имеющих наименьшую вариацию $\mathbf{L}_0$, состоит из единственного элемента

$$\mathbf{g}(\sigma)=\begin{cases}0, & \sigma=0;\\ \dfrac{1-\mathbf{r}-\cos\varphi}{1-\cos\varphi}, & 0<\sigma<1;\\ 1, & \sigma=1.\end{cases}$$

<u>Док-во</u>. Известно [10], что рассматриваемая задача связана с двойственной к ней задачей аппроксимации: найти $\min\limits_{\alpha}\|1+\alpha(1-\mathbf{r}-\cos\varphi\mathbf{t})\|=\mathbf{M}$, где $\|\cdot\|$ – равномерная норма в пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}_{[0,1]}$. Так как функция $\psi(\mathbf{t})=1-\mathbf{r}-\cos\varphi\mathbf{t}$ отрицательна при $\mathbf{t}\in[0,1)$ и монотонно возрастает, то величина $\mathbf{M}$ достигается на множестве $\mathbf{t}\in\{0;1\}$. Причем

$\mathbf{M=-1-\alpha(1-r-1)=1+\alpha(1-r-\cos\varphi)}$, т.е. $\alpha=\alpha_0=\dfrac{2}{2r-1+\cos\varphi}$, $M=\dfrac{1-\cos\varphi}{2r-1+\cos\varphi}$.

Из теоремы двойственности для сопряженных пространств [10] следует

$$L_0=\frac{1}{M}=\frac{2r-1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Покажем, что $g_0(\sigma)$, определяющая искомое решение, является кусочно-постоянной с разрывами только на множестве $\{0,1\}$. Обозначим через $\operatorname*{Var}_{[a;b]}[g]$ полную вариацию функции g на $[a,b]$. Если отрезок $[t_1;t_2]\subset[0,1]$, то

$$\int_0^1 (1+\alpha_0\psi(\sigma))dg_0(\sigma)=\int_0^1 dg_0(\sigma)+\alpha_0\int_0^1\psi(\sigma)dg_0(\sigma)=$$

$$=1\le\max_{t\in[0;t_1]}|1+\alpha_0\psi(t)|\operatorname*{Var}_{[0;t_1]}[g_0]+$$

$$+\max_{t\in[t_1;t_2]}|1+\alpha_0\psi(t)|\operatorname*{Var}_{[t_1;t_2]}[g_0]+\max_{t\in[t_2;1]}|1+\alpha_0\psi(t)|\operatorname*{Var}_{[t_2;1]}[g_0]=$$

$$=\operatorname*{Var}_{[0;t_1]}[g_0]+\max_{t\in[t_1;t_2]}|1+\alpha_0\psi(t)|\operatorname*{Var}_{[t_1;t_2]}[g_0]+\operatorname*{Var}_{[t_2;1]}[g_0].$$

Так как

$$\operatorname*{Var}_{[0;1]}[g_0]=\operatorname*{Var}_{[0;t_1]}[g_0]+\operatorname*{Var}_{[t_1;t_2]}[g_0]+\operatorname*{Var}_{[t_2;1]}[g_0]$$

и $\max\limits_{t\in[t_1;t_2]}|1+\alpha_0\psi(t)|<\max\limits_{t\in[0;1]}|1+\alpha_0\psi(t)|$, то обязательно должно выполняться условие $\operatorname*{Var}_{[t_1;t_2]}[g_0]=0$. Подставляя функцию g_0 в систему (1), находим величины скачков, что завершает доказательство утверждения.

Лемма 2. Множество решений $g(\sigma)$ системы

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 dg(\sigma)=1;\\[2ex] \displaystyle\int_0^1 \sin\varphi\,\sigma dg(\sigma)=p,\end{cases}$$

где $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $p\ge\sin\varphi$, имеющих наименьшую вариацию L_0, состоит из единственного элемента

$$g_0(\sigma)=\begin{cases}0, & \sigma=0;\\ 1-\dfrac{p}{\sin\varphi}, & 0<\sigma<1;\\ 1, & \sigma=1,\end{cases}$$

при этом $\mathbf{L_0} = \dfrac{\mathbf{2p - \sin\varphi}}{\mathbf{\sin\varphi}}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Следствие. Пусть функция $\mathbf{g_0(\sigma)}$ является решением задачи

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 dg_0(\sigma) = 1; \\ \operatorname*{Var}\limits_{[0;\,1]}[g_0] = L_0; \\ \int\limits_0^1 \left(1 - \cos\varphi\sigma\right) dg_0(\sigma) = r. \end{cases}$$

Тогда эта же функция является единственным решением задачи

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 dg_0(\sigma) = 1; \\ \operatorname*{Var}\limits_{[0;\,1]}[g_0] = L_0; \\ \int\limits_0^1 \sin\varphi\sigma dg_0(\sigma) = r\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Для доказательства следствия достаточно в лемме 2 положить $\mathbf{p = r\,ctg\,\dfrac{\varphi}{2}}$ и учесть, что $\dfrac{\mathbf{2p - \sin\varphi}}{\mathbf{\sin\varphi}} = \dfrac{\mathbf{2r - 1 + \cos\varphi}}{\mathbf{1 - \cos\varphi}}$.

Перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 1. Для того, чтобы квазиполиномы семейства $\mathbf{H}$ были устойчивыми необходимо и достаточно, чтобы был устойчив полином

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

и квазиполином

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2\left(\frac{1-L}{2} + \frac{1+L}{2}e^{-\lambda\tau}\right).$$

Док-во. *Необходимость*. Очевидна, так как полином $\mathbf{f_1(\lambda)}$ и квазиполином $\mathbf{f_2(\lambda)}$ принадлежат семейству $\mathbf{H}$.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы, но в семействе $\mathbf{H}$ имеется неустойчивый квазиполином

$$f_3(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2\int\limits_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma} dg_3(\sigma).$$

Рассмотрим семейство функций $\Gamma=\left\{g \,\middle|\, g=g_\theta(\sigma)=\tilde{g}+\theta(g_3-\tilde{g}), \theta\in[0;1]\right\}$, где $\tilde{g}(\sigma)=0$ при $\sigma=0$ и $\tilde{g}(\sigma)=1$ при $0<\sigma\le 1.$ Так как для всех $\theta\in[0;1]$

$$\underset{[0;1]}{\mathrm{Var}}[g]\le(1-\theta)\underset{[0;1]}{\mathrm{Var}}[\tilde{g}]+\theta\underset{[0;1]}{\mathrm{Var}}[g_3]\le L,$$

то $\Gamma\subset G$.

Определим функцию $\mu(\theta)=\max\{\mathrm{Re}\lambda_\theta\}$, где максимум берется среди всех нулей квазиполинома, соответствующего функции $g_\theta(\sigma)$. Функция $\mu(\theta)$ непрерывна, что следует из теоремы о непрерывной зависимости нулей квазиполиномов запаздывающего типа от параметров [1] и из теоремы Хелли для интеграла Стилтьеса. Кроме того, $\mu(0)<0$, что следует из условия теоремы и $\mu(1)\ge 0$ по определению. Поэтому найдется величина $\theta_0\in(0;1]$ такая, что $\mu(\theta_0)=0$. Это означает, что квазиполином

$$f_4(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_2\int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma}dg_{\theta_0}(\sigma)$$

имеет чисто мнимые нули $\pm i\omega_1$.

Рассмотрим множество

$$K(\omega)=\left\{(x,y)\,\middle|\, x=\int_0^1(1-\cos\omega\tau\sigma)dg(\sigma),\ y=\int_0^1(1-\cos\omega\tau\sigma)dg(\sigma),\ g(\sigma)\in G\right\}.$$

Положим $u(\omega)=-\dfrac{\omega^2}{a_2}+1$, $v(\omega)=\dfrac{a_1}{a_2}\omega$. По условию теоремы $a_1>0, a_2>0$. Так как $g_{\theta_0}(\sigma)\in G$, то $(u(\omega_1), v(\omega_1))\in K(\omega_1)$. Очевидно, что при достаточно малых величинах параметра ω выполняется $(u(\omega), v(\omega))\notin K(\omega)$. В силу непрерывности рассматриваемых функций существует $\omega_2\in(0;\omega_1]$; $(u(\omega_2), v(\omega_2))\in\partial K(\omega_2)$, где $\partial K(\omega)$ – граница множества $K(\omega)$.

Из вышесказанного следует, что необходимое и достаточное условие устойчивости всех квазиполиномов семейства H – $(u(\omega), v(\omega))\notin\partial K(\omega)$, для всех $\omega\in(0;+\infty)$.

Введем в рассмотрение две функции:

$$\xi(\omega)=\sup_{g\in G}\int_0^1(1-\cos\omega\tau\sigma)dg(\sigma);\qquad \eta(\omega)=\sup_{g\in G}\int_0^1\sin\omega\tau\sigma dg(\sigma).$$

Из лемм 1, 2 следует, что $\xi(\omega) = \frac{L+1}{2}(1-\cos\omega\tau)$, $\omega \in \left[0; \frac{\pi}{\tau}\right]$, $\eta(\omega) = \frac{L+1}{2}\sin\omega\tau$, $\omega \in \left[0; \frac{\pi}{2\tau}\right]$. Так как функция $u(\omega)$ – убывающая и $u(\omega) > 0$, а функция $\xi(\omega)$ – возрастающая и $\xi(0) = 0$, то существует единственное решение ω_0 уравнения $\xi(\omega) - u(\omega) = 0$, причем $\omega_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2\tau}\right)$. Возможны три случая: а) $v(\omega_0)=\eta(\omega_0)$, б) $v(\omega_0)<\eta(\omega_0)$, в) $v(\omega_0)>\eta(\omega_0)$.

В первом случае точка $(u(\omega_0), v(\omega_0)) \in K(\omega_0)$, а по следствию из лемм 1, 2, получаем, что квазиполином $f_2(\lambda)$ – неустойчив.

Рассмотрим второй случай. Так как $\inf\limits_{g\in G}\int\limits_0^1 \sin\omega\tau\sigma dg(\sigma) \le 0$ для всех $\omega \ge 0$, то найдется значение $\omega_3 > \omega_0$ такое, что $(u(\omega_3), v(\omega_3)) \in K(\omega_3)$. Следовательно, оказываются неустойчивыми все квазиполиномы семейства H, у которых $\int\limits_0^1 \sin\omega_3\tau\sigma dg(\sigma) \ge v(\omega_3)$, в том числе, и квазиполином $f_2(\lambda)$.

Наконец, в третьем случае $(u(\omega), v(\omega)) \notin K(\omega)$ для всех $\omega > 0$, так как $\frac{dv(\omega)}{d\omega} > \frac{d\eta(\omega)}{d\omega}$, $\omega \ge \omega_0$. Тогда при выполнении условий $a_1>0$, $a_2>0$ неустойчивость семейства H равносильна неустойчивости квазиполинома $f_2(\lambda)$.

Теорема полностью доказана.

Пользуясь теоремой 1, условие устойчивости возможно получить в явном виде, если учесть, что предельная величина L_0 определяется из уравнения $f_2(i\omega_0, L_0) = 0$.

Теорема 2. Все квазиполиномы семейства H устойчивы тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$1)\ a_1 > 0,\ a_2 > 0; \qquad 2)\ \tau < \frac{2}{\omega_0}\operatorname{arcctg}\frac{a_1\omega_0}{-\omega_0^2 + a_2},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(a_1^2 + a_2(L-1)\right) + \sqrt{\left(a_1^2 + a_2(L-1)\right)^2 + 4La_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Док-во. При $\tau = 0$ полином $f_1(\lambda)$ устойчив в силу условия 1. Найдем τ_0, при котором впервые появляется $f(\lambda) \in H$ с чисто мнимыми нулями. В силу теоремы 1 им является квазиполином $f_2(\lambda)$. Величины L и τ_0 связаны между собой условием $f_2(i\omega_0) = 0$, которое запишем в виде

$$\begin{cases} -\omega^2 + a_2 = a_2 \dfrac{1+L}{2}\left(1 - \cos\omega\tau_0\right); \\ a_1\omega = a_2 \dfrac{1+L}{2} \sin\omega\tau_0 . \end{cases}$$

После преобразований получим

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\dfrac{\omega\tau_0}{2} = \dfrac{a_1\omega}{-\omega^2 + a_2}; \\ \left(\omega^2 + a_2\dfrac{L-1}{2}\right)^2 + a_1\omega^2 = a_2^2\left(\dfrac{1+L}{2}\right)^2 . \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $\omega = \omega_0$, откуда – $\tau_0 = \dfrac{2}{\omega_0}\operatorname{arcctg}\dfrac{a_1\omega_0}{-\omega_0^2 + a_2}$. Следовательно, при $\tau < \tau_0$ все квазиполиномы семейства H устойчивы.

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим следующий пример.

Найдем условия устойчивости малых колебаний в наследственно-упругой системе с трением [11]. Рассмотрим для этого дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) = F(x), \tag{2}$$

где $x(t)$ – функция отклонения от заданного положения; a_1 – коэффициент, обусловленный трением в системе; $F(x)$ – упругая сила. Считаем, что в упругой системе деформация в момент времени t_0 зависит от напряжений для $t \le t_0$. Если предположить, что $F(x)$ – линейная часть функционала, описывающего силу трения, то в силу теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала, заданного на пространстве непрерывных функций, правая часть уравнения (2)

$$F(x) = -\int_0^{+\infty} x(t-\sigma)\,dp(\sigma),$$

где $p(\sigma)$ – функция с ограниченной вариацией на $(0; +\infty)$.

Предположим далее, что функция $\mathbf{p(\sigma)}$, определяющая «память» материала, начиная с некоторого момента времени, убывает к нулю с такой скоростью, что для данной задачи можно считать $\mathbf{p(\sigma)=0}$, при $\boldsymbol{\sigma \geq \tau}$. Положим $\mathbf{g(\alpha)} = \dfrac{\mathbf{p(\alpha\tau)}}{\int_0^{+\infty} \mathbf{dp(\alpha\tau)}}$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{a_1}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{a_2}\int_0^1 \mathbf{x(t-\alpha\tau)dg(\alpha)},$$

где $\mathbf{a_2} = \int_0^{+\infty} \mathbf{dp(\sigma)}$, $\int_0^1 \mathbf{dg(\alpha)=1}$. Если функция $\mathbf{g(\alpha)}$ точно не известна, что соответствует реальной ситуации, то условие устойчивости в терминах величин $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{L} = \int_0^1 |\mathbf{dg(\theta)}|$, находится из теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения – М.: Мир, 1967. – 548 с.

2. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1942. – Т. 6. – С. 115 - 134.

3. Неймарк Ю.И. Д - разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости лианеаризованных распределенных систем) // Прикладная механика и математика. – 1949. – Т. 13. – С. 349 - 380.

4. Цыпкин Я.З. Степень устойчивости систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика, – 1947. – Т. 8, № 4. – С. 145 - 156.

5. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. – С-Пб.: Изд. С-Пб. ун-та, 1993. – 328 с.

6. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Robust stability of time delay systems // IEEE Trans. – 1994. – Vol.39. – P. 2388 - 2398.

7. Fu M., Olbrot A.W., Polis M.P. Robust stability for time delay systems: the edge theorem and graphical test // IEEE Trans. – 1989. – AS. 34, № 8. – P. 813 - 820.

8. Barmish B.R., Shi Z. Robust stability of perturbed system with time-delay // Automatica. – 1989. – T. 25. – P. 371 - 381.

9. Mori T., Kokame H. An extension of Kharitonov’s theorem and its application // Proc. Amer. Contr. Conf., Minneapolis. – 1987. – P. 892 - 896.

10. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи – М.: Наука, 1973. – 552 с.

11. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 312 с.

Поступила в редколлегию 5.6.2000