УДК 519.854

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

к.т.н. А.В. Шостак
(представил д.ф.-м.н. С.В. Смеляков)

В статье проанализирована сложность представленного алгоритма приближенного решения задачи коммивояжера (ЗК).

Как известно [1], алгоритмы приближенного решения ЗК являются одними из основных инструментов решения практических задач. В приводимом ниже алгоритме построение гамильтонова цикла (ГЦ) начинается с произвольно выбираемой вершины $\mathbf{x_1} \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ - множество вершин. В соответствии с вероятностью выбора ребра выбирается $(\mathbf{n} - \mathbf{2})$ ребра ГЦ, где $\mathbf{n}$ - число вершин. Вероятность выбора $\mathbf{j}-$го ребра на $\mathbf{r}-$м $\left(\mathbf{r} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{n}-\mathbf{2}}\right)$ шаге построения ГЦ пропорциональна весу $\mathbf{V_j}$ этого ребра, определяемого как

$$\mathbf{V_j} = \left(l_\mathbf{j}\right)^{-\alpha}, \tag{1}$$

где α - коэффициент размытости, $l_\mathbf{j}$ - длина $\mathbf{j}-$го ребра. В общем случае при определении $\mathbf{r}$-го ребра $\left(\mathbf{r} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{n}-\mathbf{2}}\right)$ выбор делается из максимум $(\mathbf{n} - \mathbf{r})$ ребер инцидентных вершине $\mathbf{x_r}$. Для включения ребра в ГЦ выбирается соответствующее номеру ν ребро $\mathbf{u_j}$ если

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} V_i < \chi \cdot \sum_{i=1}^{n-r} V_i \le \sum_{i=1}^{\nu} V_i, \tag{2}$$

где χ - случайное равномерно распределенное (р.р.) в интервале $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ число. Предполагается, что хотя бы один ГЦ на графе существует.

В целом алгоритм можно представить следующим образом.

1. Ввести исходные данные: количество вершин - $\mathbf{n}$; матрицу длин ребер графа - $\mathbf{L}$; одномерную матрицу списка ребер - $\mathbf{A}$; коэффициент размытости - α; номер вершины $\mathbf{x_1} = \mathbf{J_0}$; число просматриваемых вариантов ГЦ - $\mathbf{I_0}$; начальное значение длины ГЦ - $\mathbf{L}\left(\overline{\mathbf{G}}\right)$, $\mathbf{I} = \mathbf{0}$, $\mathbf{J} = \mathbf{J_0}$.

2. $\mathbf{I} = \mathbf{I} + \mathbf{1}$. Если $\mathbf{I} > \mathbf{I_0}$, то перейти к п.12, инче - $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$.

3. $\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{1}$. Сформировать в соответствии с (1) матрицу весов ребер, исходящих из $\mathbf{x_r}$ - й вершины - $\mathbf{V} = \left\| \mathbf{V}\nu \right\|_{\mathbf{n}-\mathbf{r}}^{\mathbf{1}}$.

4. Вычислить псевдослучайное равномерно - распределенное число в интервале **(0, 1)** число χ.

5. Выбрать в соответствии с (2) ребро $\mathbf{u_j}$, **J** присвоить значение номера вершины $\mathbf{x_r}$, включенной посредством выбора ребра $\mathbf{u_j}$ в ГЦ, $\mathbf{a_j = 1}$.

6. Если $\mathbf{1 < r < (n-2)}$, то обнулить веса ребер между $\mathbf{x_r}$ -й вершиной ГЦ и всеми другими уже вошедшими в ГЦ вершинами и перейти к п.3.

7. В качестве $\mathbf{(n-1)}$ - го ребра взять ребро между вершиной $\mathbf{x_{n-1}}$ с номером **J** и вершиной $\mathbf{x_n} = \{\, \mathbf{X} / \bigcup\limits_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{x_i} \,\}$.

8. В качестве **n** - го ребра взять ребро между вершинами $\mathbf{x_n}$ и $\mathbf{x_1}$.

9. Вычислить значение длины ГЦ $\mathbf{L(G_I)}$, соответствующее матрице **A(I).**

10. Сравнить значение $\mathbf{L(G_I)}$ с рекордным на данный момент значением $\mathbf{L(\overline{G})}$. Если $\mathbf{L(G_I) \geq L(\overline{G})}$, то перейти к п.2, иначе $\mathbf{L(\overline{G}) = L(G_I)}$.

Примечание [K1]:

11. Запомнить новое рекордное значение $\mathbf{\overline{G}}$, задаваемое матрицей $\mathbf{\overline{A} = A(I)}$, и соответствующее $\mathbf{\overline{G}}$ значение $\mathbf{L(\overline{G})}$. Перейти к п.2.

12. Останов. Получен ГЦ $\mathbf{\overline{G}}$, задаваемый матрицей списка ребер $\mathbf{\overline{A}}$, и соответствующее матрице $\mathbf{\overline{A}}$ значение длины ГЦ $\mathbf{L(\overline{G})}$.

Основными параметрами управления в данном алгоритме являются: значение коэффициента размытости α, номер начальной вершины построения ГЦ $\mathbf{J_0}$ и число просматриваемых ГЦ $\mathbf{I_0}$.

Оценим сложность вычислений в приведенном подходе к решению ЗК. Объем вычислений при выборе **r**-го ребра пропорционален количеству ребер (**n-r**), из которого осуществляется этот выбор. Для построения одного ГЦ необходимо сделать **n-2** вероятностных выбора по правилу (2) из всего количества ребер. Если же строится по $\mathbf{I_0}$ ГЦ из каждой из **n** вершин графа, то суммарный объем вычислений будет пропорционален величине $\mathbf{I_0 \times n \times (n^2 - n - 2)/2}$. На примере тестовой задачи размерности **n=25** из [2] исследована относительная погрешность рассматриваемого алгоритма, которая не превышает 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1.Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика.– 1989. – №11. – С. 3 - 26.

2. Хелд Н., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. – М.: Наука. – 1964. – №9. – С. 202 - 218.

Поступила в редколлегию 16.8.2000