УДК 620.171.5:539.374

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИОННОГО КОМПОЗИТА

Л.Д. Филатова
(представил д. ф.-м. н., проф. Ю. Г. Машкаров)

Для разделения напряжений в фотоупругости конструкционных ортотропных композиционных материалов с оптически прозрачной матрицей предложен численный (приближенный) способ разделения напряжений, позволяющий исключить операцию дифференцирования экспериментальных данных.

В последние годы перспективы развития новейших производств и технологий требуют применения материалов с таким сочетанием свойств, каким не обладают традиционные конструкционные материалы – металлы и сплавы. Речь идет о материалах с высокими эксплуатационными свойствами и новыми функциональными возможностями. Важнейшими представителями материалов такого класса являются полимерные композиционные материалы, обладающие высокой удельной прочностью, жесткостью, коррозионной стойкостью и другими свойствами.

Композит – гетерогенный и гетерофазный материал. Эти особенности обуславливают сложную и непредсказуемую динамику формирования напряженно - деформированного состояния материала – проблема, которая в настоящее время является одной из ключевых в механике композитов [1].

Автором этой статьи в течении ряда лет объем информации о напряженно-деформированном состоянии композиционного материала определялся по данным фотоупругих исследований материала (применялся интерференционно - поляризационный метод в оптическом диапазоне электромагнитных волн). Практика применения этого метода показала, что для изучения напряженно - деформированного состояния конструкционного материала он является одним из самых надежных и перспективных, но данных поляризационно - оптических измерений недостаточно для определения компонент тензора напряжений и тензора деформаций в произвольных точках материала или модели. Поэтому в методе фотоупругости всегда приходится решать задачу о разделении напряжений, т.е. задачу об определении компонент тензоров напряжений и деформаций с использованием данных фотоупругих измерений и установленных оптико-механических соотношений. Для решения этой задачи чаще всего используется дополнительная экспериментальная информация или же численные методы.

Рассмотрим один из численных способов разделения напряжений в модели ортотропного композита (ортотропной композит это наиболее распространенный конструкционный материал, в который армирующая фаза имеет три ортогональные плоскости симметрии). Ограничимся рассмотрением случая плоско - напряженного состояния. При выводе уравнений будем подразумевать декартову систему координат. Оси координат обозначим через $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$.

Для вывода основных соотношений способа рассмотрим:
– уравнения равновесия плоских тел второго порядка [2]:

$$\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}=0;\quad \frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}=0; \tag{1}$$

– уравнения совместности деформаций в напряжениях

$$\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x_2^2}-\frac{\nu_1}{E_1}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_2^2}+\frac{1}{E_2}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_2^2}-\frac{\nu_1}{E_1}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x_1^2}=\frac{1}{G_{12}}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}; \tag{2}$$

– соотношения закона Гука для ортотропного тела в главных осях:

$$\langle\varepsilon_1\rangle=S_{11}\langle\sigma_2\rangle+S_{12}\langle\sigma_2\rangle;\ \langle\varepsilon_2\rangle=S_{12}\langle\sigma_1\rangle+S_{22}\langle\sigma_2\rangle;\ \langle\varepsilon_{12}\rangle=S_{66}\langle\sigma_{12}\rangle \tag{3}$$

– оптико - механические соотношения (закон фотоупругости конструкционно - ортотропного тела):

$$\frac{\sigma_1}{c_{11}}-\frac{\sigma_2}{c_{22}}=\frac{m}{h}\cos 2\varphi;\qquad \frac{2\sigma_{12}}{c_{12}}=\frac{m}{h}\sin 2\varphi. \tag{4}$$

В приведенных уравнениях компоненты тензора напряжений обозначены через $\sigma_{ij}\ (i,j=1,2)$. Если $\mathbf{i}=\mathbf{j}$, то соответствующее напряжение будет нормальным (например $\sigma_{11}=\sigma_1$), а если $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$, то – касательным. E_1, E_2, ν_1, G_{12} - технические упругие постоянные; $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ - средние деформации; $\langle\sigma_{ij}\rangle$ - средние напряжения; S_{ij} - компоненты матрицы податливости; c_{ij} - оптические постоянные материала; **m** – порядок полос интерференции; **h** – длина пути фронта волны (т.е. толщина исследуемой модели); φ - параметр оптических изоклин.

Умножим уравнение (2) на E_1/c_{11}; к левой части добавим и вычтем выражение $1/c_{22}\,\dfrac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_2^2}$. В результате получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\sigma_1}{c_{11}}-\frac{\sigma_2}{c_{22}}\right)+\frac{1}{c_{22}}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_2^2}-\frac{\nu_1}{c_{11}}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_2^2}+\frac{E_1}{c_{11}E_2}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_1^2}-\\ -\frac{\nu_1}{c_{11}}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x_1^2}-\frac{E_1}{c_{11}G_{12}}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Из уравнений равновесия (1) найдем

$$\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}-\frac{\partial X_2}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x_1^2}-\frac{\partial X_1}{\partial x_1}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\sigma_1}{c_{11}}-\frac{\sigma_2}{c_{22}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\left(\frac{1}{c_{22}}-\frac{2\nu_1}{c_{11}}+\frac{E_1}{c_{11}c_{12}}\right)\sigma_1+\frac{E_1}{c_{11}E_2}\sigma_2\right]+$$
$$+\left(\frac{1}{c_{22}}-\frac{\nu_1}{c_{11}}+\frac{E_1}{c_{11}c_{12}}\right)\frac{\partial X_1}{\partial x_1}-\left(\frac{1}{c_{22}}-\frac{\nu_1}{c_{11}}\right)\frac{\partial X_2}{\partial x_2}=0. \tag{7}$$

Первый член в этом уравнении согласно оптико-механическому соотношению (4) есть вторая производная от экспериментально измеряемых величин **(m, φ)**. Примем допущение о том, что напряжения являются непрерывными функциями координат. Обозначим выражение $\left(\frac{\sigma_1}{c_{11}}-\frac{\sigma_2}{c_{22}}\right)$ через $\Delta\sigma$. Представим $\Delta\sigma$ на оси x_1 и в ее малой окрестности в виде бесконечного ряда аналитических функций

$$\Delta\sigma(x_1, x_2) = \Delta\sigma(0, x_2)\left[\varphi_0(x_2) + \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_1\left(x_1, x_2^i\right)\right], \tag{8}$$

где $\varphi_0(x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k}x_2^k; \quad \varphi_i\left(x_1, x_2^i\right) = \sum a_{ik}\left(x_1, x_2^i\right)^k$.

Это представление обладает достаточной общностью и в то же время позволяет выразить вторую производную от $\Delta\sigma$ по x_2 на оси $0x_1$ через значение $\Delta\sigma$ на этой оси. В самом деле, дифференцируя (8) дважды по x_2 и полагая после этого $x_2 = 0$, получим на оси $0x_1$ (d_i – постоянные)

$$\frac{\partial^2\Delta\sigma(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -\Delta\sigma(x_1, 0)\cdot\left(d_0 + d_1x_1 + d_2x_1^2\right). \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (7) с учетом (9), получим соотношение для напряжений σ_1 и σ_2 на оси x_1:

$$\left[\frac{1}{c_{22}} - \frac{2\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}}\right]\sigma_1 + \frac{E_1}{c_{11}E_2}\sigma_2 =$$
$$= Ax_1 + B + \iint\left(\frac{\sigma_1}{c_{11}} - \frac{\sigma_2}{c_{22}}\right)\left(d_0 + d_1x_1 + d_2x_1^2\right)dx_1dx_1 + \tag{10}$$
$$+\left(\frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}}\right)\iint\frac{\partial X_2}{\partial x_2}dx_1dx_1 - \left(\frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}}\right)\int\frac{\partial X_1}{\partial x_1}dx_1,$$

где **A**, **B** – постоянные интегрирования.

Разрешая совместно (10) и (4), получим выражение для компонент напряжений σ_1 и σ_2 на оси $0x_1$:

$$\sigma_1 = \frac{b_2 F + a_2 N(x_1,0)}{a_1 b_2 + a_2 b_1}; \quad (11) \qquad \sigma_2 = \frac{b_1 F + a_1 N(x_1,0)}{a_1 b_2 + a_2 b_1}, \qquad (12)$$

где $a_1 = \frac{1}{c_{22}} - \frac{2\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}}$; $a_2 = \frac{E_1}{c_{11}E_2}$; $b_1 = \frac{1}{c_{11}}$; $b_2 = \frac{1}{c_{22}}$; $N(x_1,0) = \frac{m(x_1,0)}{h}\cos 2\varphi$;

$$F = \left(\frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}}\right)\iint \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_1 dx_1 - \left(\frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}}\right)\int \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + Ax_1 + \\ + \iint\left(\frac{\sigma_{11}}{c_{11}} - \frac{\sigma_{22}}{c_{22}}\right)\left(d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_1^2\right) dx_1 dx_1. \qquad (13)$$

Выражения для напряжений (11) и (12) при $d_0 = d_1 = d_2 = 0$ будем называть нулевым приближением для σ_1 и σ_2. Из (9) видно, что при этом условии вторая производная по x_2 от $\Delta\sigma$ или от $N(x_1,0)$ равняется нулю. Анализ картин полос интерференции в ортотропных моделях показывает, что это с достаточной точностью выполняется вдоль осей упругой и геометрической симметрий моделей, не содержащих особенностей. Постоянные **A** и **B** могут быть найдены из граничных условий или условий статического равновесия.

Выражения (11) и (12) при $d_0 \neq 0$, $d_1 = d_2 = 0$ будем называть первым приближением для σ_1 и σ_2, при $d_0 = 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 = 0$ – вторым и при всех отличных от нуля коэффициентах – третьим приближением. Для определения постоянных **A**, **B**, d_2 можно использовать граничные условия, уравнения статического равновесия, а также дополнительные данные для напряжения в некоторых точках, которые могут быть легко получены с применением других методов – метода резкости касательных напряжений, из уравнений Ляме - Максвелла и др.

Таким образом, численный метод, предложенный в данной работе, может применяться в реальных конструкционных материалах различного состава и различной конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нетребко В.П. Фотоупругость анизотропных тел. – М.: МГУ, 1988. – 120 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1987. – 248 с.

Поступила в редколлегию 26.6.2000