

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИОННОГО КОМПОЗИТА

Л.Д. Филатова

(представил д. ф.-м. н., проф. Ю. Г. Машкаров)

Для разделения напряжений в фотоупругости конструкционных ортотропных композиционных материалов с оптически прозрачной матрицей предложен численный (приближенный) способ разделения напряжений, позволяющий исключить операцию дифференцирования экспериментальных данных.

В последние годы перспективы развития новейших производств и технологий требуют применения материалов с таким сочетанием свойств, каким не обладают традиционные конструкционные материалы – металлы и сплавы. Речь идет о материалах с высокими эксплуатационными свойствами и новыми функциональными возможностями. Важнейшими представителями материалов такого класса являются полимерные композиционные материалы, обладающие высокой удельной прочностью, жесткостью, коррозионной стойкостью и другими свойствами.

Композит – гетерогенный и гетерофазный материал. Эти особенности обуславливают сложную и непредсказуемую динамику формирования напряженно - деформированного состояния материала – проблема, которая в настоящее время является одной из ключевых в механике композитов [1].

Автором этой статьи в течении ряда лет объем информации о напряженно-деформированном состоянии композиционного материала определялся по данным фотоупругих исследований материала (применялся интерференционно - поляризационный метод в оптическом диапазоне электромагнитных волн). Практика применения этого метода показала, что для изучения напряженно - деформированного состояния конструкционного материала он является одним из самых надежных и перспективных, но данных поляризационно - оптических измерений недостаточно для определения компонент тензора напряжений и тензора деформаций в произвольных точках материала или модели. Поэтому в методе фотоупругости всегда приходится решать задачу о разделении напряжений, т.е. задачу об определении компонент тензоров напряжений и деформаций с использованием данных фотоупругих измерений и установленных оптико-механических соотношений. Для решения этой задачи чаще всего используется дополнительная экспериментальная информация или же численные методы.

Рассмотрим один из численных способов разделения напряжений в модели ортотропного композита (ортотропной композит это наиболее распро-

страненный конструкционный материал, в который армирующая фаза имеет три ортогональные плоскости симметрии). Ограничимся рассмотрением случая плоско - напряженного состояния. При выводе уравнений будем подразумевать декартову систему координат. Оси координат обозначим через  $x_1$  и  $x_2$ .

Для вывода основных соотношений способа рассмотрим:

– уравнения равновесия плоских тел второго порядка [2]:

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0; \quad (1)$$

– уравнения совместности деформаций в напряжениях

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_2^2} - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_1^2} - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{G_{12}} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad (2)$$

– соотношения закона Гука для ортотропного тела в главных осях:

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = S_{11} \langle \sigma_2 \rangle + S_{12} \langle \sigma_1 \rangle; \quad \langle \varepsilon_2 \rangle = S_{12} \langle \sigma_1 \rangle + S_{22} \langle \sigma_2 \rangle; \quad \langle \varepsilon_{12} \rangle = S_{66} \langle \sigma_{12} \rangle \quad (3)$$

– оптико - механические соотношения (закон фотоупругости конструкционно - ортотропного тела):

$$\frac{\sigma_1}{c_{11}} - \frac{\sigma_2}{c_{22}} = \frac{m}{h} \cos 2\varphi; \quad \frac{2\sigma_{12}}{c_{12}} = \frac{m}{h} \sin 2\varphi. \quad (4)$$

В приведенных уравнениях компоненты тензора напряжений обозначены через  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Если  $i = j$ , то соответствующее напряжение будет нормальным (например  $\sigma_{11} = \sigma_1$ ), а если  $i \neq j$ , то – касательным.  $E_1, E_2, \nu_1, G_{12}$  - технические упругие постоянные;  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  - средние деформации;  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  - средние напряжения;  $S_{ij}$  - компоненты матрицы податливости;  $c_{ij}$  - оптические постоянные материала;  $m$  – порядок полос интерференции;  $h$  – длина пути фронта волны (т.е. толщина исследуемой модели);  $\varphi$  - параметр оптических изоклин.

Умножим уравнение (2) на  $E_1/c_{11}$ ; к левой части добавим и вычтем выражение  $1/c_{22} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2^2}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\sigma_1}{c_{11}} - \frac{\sigma_2}{c_{22}} \right) + \frac{1}{c_{22}} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2^2} - \frac{\nu_1}{c_{11}} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2^2} + \frac{E_1}{c_{11} E_2} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_1^2} - \\ - \frac{\nu_1}{c_{11}} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_1^2} - \frac{E_1}{c_{11} G_{12}} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнений равновесия (1) найдем

$$\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\sigma_1}{c_{11}} - \frac{\sigma_2}{c_{22}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ \left( \frac{1}{c_{22}} - \frac{2\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}c_{12}} \right) \sigma_1 + \frac{E_1}{c_{11}E_2} \sigma_2 \right] + \\ & + \left( \frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}c_{12}} \right) \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \left( \frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} \right) \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первый член в этом уравнении согласно оптико-механическому соотношению (4) есть вторая производная от экспериментально измеряемых величин  $(\mathbf{m}, \boldsymbol{\varphi})$ . Примем допущение о том, что напряжения являются непрерывными функциями координат. Обозначим выражение

$\left( \frac{\sigma_1}{c_{11}} - \frac{\sigma_2}{c_{22}} \right)$  через  $\Delta\sigma$ . Представим  $\Delta\sigma$  на оси  $x_1$  и в ее малой окрестности в виде бесконечного ряда аналитических функций

$$\Delta\sigma(x_1, x_2) = \Delta\sigma(0, x_2) \left[ \varphi_0(x_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_1, x_2^i) \right], \quad (8)$$

где  $\varphi_0(x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} x_2^k$ ;  $\varphi_i(x_1, x_2^i) = \sum a_{ik} (x_1, x_2^i)^k$ .

Это представление обладает достаточной общностью и в то же время позволяет выразить вторую производную от  $\Delta\sigma$  по  $x_2$  на оси  $0x_1$  через значение  $\Delta\sigma$  на этой оси. В самом деле, дифференцируя (8) дважды по  $x_2$  и полагая после этого  $x_2 = 0$ , получим на оси  $0x_1$  ( $d_i$  – постоянные)

$$\frac{\partial^2 \Delta\sigma(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -\Delta\sigma(x_1, 0) \cdot (d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_1^2). \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (7) с учетом (9), получим соотношение для напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на оси  $x_1$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{c_{22}} - \frac{2\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}} \right] \sigma_1 + \frac{E_1}{c_{11}E_2} \sigma_2 = \\ & = Ax_1 + B + \iint \left( \frac{\sigma_1}{c_{11}} - \frac{\sigma_2}{c_{22}} \right) (d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_1^2) dx_1 dx_1 + \\ & + \left( \frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} \right) \iint \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_1 dx_1 - \left( \frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}} \right) \int \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – постоянные интегрирования.

Разрешая совместно (10) и (4), получим выражение для компонент напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на оси  $\mathbf{Ox}_1$ :

$$\sigma_1 = \frac{b_2 F + a_2 N(x_1, 0)}{a_1 b_2 + a_2 b_1}; \quad (11) \quad \sigma_2 = \frac{b_1 F + a_1 N(x_1, 0)}{a_1 b_2 + a_2 b_1}, \quad (12)$$

где  $a_1 = \frac{1}{c_{22}} - \frac{2\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}}$ ;  $a_2 = \frac{E_1}{c_{11}E_2}$ ;  $b_1 = \frac{1}{c_{11}}$ ;  $b_2 = \frac{1}{c_{22}}$ ;  $N(x_1, 0) = \frac{m(x_1, 0)}{h} \cos 2\varphi$ ;

$$F = \left( \frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} \right) \iint \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_1 dx_1 - \left( \frac{1}{c_{22}} - \frac{\nu_1}{c_{11}} + \frac{E_1}{c_{11}G_{12}} \right) \int \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + \mathbf{A}x_1 + \\ + \iint \left( \frac{\sigma_{11}}{c_{11}} - \frac{\sigma_{22}}{c_{22}} \right) (\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1 x_1 + \mathbf{d}_2 x_1^2) dx_1 dx_1. \quad (13)$$

Выражения для напряжений (11) и (12) при  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$  будем называть нулевым приближением для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Из (9) видно, что при этом условии вторая производная по  $x_2$  от  $\Delta\sigma$  или от  $N(x_1, 0)$  равняется нулю. Анализ картин полос интерференции в ортотропных моделях показывает, что это с достаточной точностью выполняется вдоль осей упругой и геометрической симметрий моделей, не содержащих особенностей. Постоянные  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  могут быть найдены из граничных условий или условий статического равновесия.

Выражения (11) и (12) при  $\mathbf{d}_0 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$  будем называть первым приближением для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , при  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{d}_1 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$  – вторым и при всех отличных от нуля коэффициентах – третьим приближением. Для определения постоянных  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{d}_2$  можно использовать граничные условия, уравнения статического равновесия, а также дополнительные данные для напряжения в некоторых точках, которые могут быть легко получены с применением других методов – метода резкости касательных напряжений, из уравнений Ляме - Максвелла и др.

Таким образом, численный метод, предложенный в данной работе, может применяться в реальных конструкционных материалах различного состава и различной конфигурации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нетребко В.П. Фотоупругость анизотропных тел. – М.: МГУ, 1988. – 120 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1987. – 248 с.

*Поступила в редколлегию 26.6.2000*

---