УДК 681.32

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ТЕСТОВ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

д.т.н. В.Д. Дмитриенко, В.И. Панченко

На основе теории категорий и универсальных алгебр предложены математические модели процессов синтеза тестов цифровых устройств и алгоритмы синтеза тестов.

В настоящее время существует большое число различных методов синтеза тестов для цифровых устройств. Опишем эти методы с помощью математического аппарата современной алгебры – теории универсальных алгебр [1] и теории категорий [2].

*Определение 1*. Пара **(M, D)**, где **M** – непустое множество элементов, а **D** – множество (возможно пустое) операций на **M**, называется универсальной алгеброй или просто алгеброй.

Множество **D** операций можно рассматривать отдельно от алгебры. Точнее, можно говорить о множестве операционных символов, которое называется сигнатурой. Если каждому операционному символу из **D** поставлена в соответствие операция на множестве **M**, то возникает алгебра сигнатуры **D**.

*Определение 2*. Если **M** – непустое множество и $\mathbf{n \geq 1}$, то **n**-арной операцией на множестве **M** называется отображение прямого произведения $\underbrace{\mathbf{M\times\ldots\times M}}_{\mathbf{n\ раз}}$ в **M**.

*Определение 3*. Нуль-арной операцией называется операция, отмечающая некоторый элемент из **M**.

*Определение 4*. Если **A** и **B** – алгебры сигнатуры **D**, то отображение алгебр $\mathbf{f\colon A \to B}$ называется гомоморфизмом, если для каждой нуль-арной операции $\mathbf{d_0 \in D}$

$$\mathbf{f(d_0(A)) = d_0(B)} \tag{1}$$

и для любой n-арной операции $\mathbf{d_n \in D}$ и любых $\mathbf{a_1, \ldots, a_n \in A}$

$$\mathbf{f(d_n(a_1, \ldots, a_n)) = d_n(f(a_1), \ldots, f(a_n))}. \tag{2}$$

Из определения гомоморфизма алгебр следует, что если имеется две или большее число различных алгебр с одинаковой сигнатурой, то с

© д.т.н. В.Д. Дмитриенко, В.И. Панченко, 2000

помощью гомоморфизма алгебр алгоритмы из одной алгебры могут формальным образом переноситься в другую алгебру.

Рассмотрим множество **T** универсальных алгебр, сигнатуры которых различны, но все алгебры имеют одинаковое число операций каждой арности. Без потери общности можно считать, что операции каждой алгебры $\mathbf{A_\tau(M_\tau,\ D_\tau)}$, $\tau\in\mathbf{T}$ упорядочены в сигнатуре $\mathbf{D_\tau = \{\, d_1^\tau,\ d_2^\tau,\ \ldots,\ d_m^\tau\,\}}$ по возрастанию арности операций. При таких предположениях гомоморфизм алгебр $\mathbf{f\colon A(M_a,\ D_a = \{\, d_1^a,\ d_2^a, \ldots,\ d_m^a\,\}) \to B((M_b,\ D_b = \{\, d_1^b,\ d_2^b,\ \ldots,\ d_m^b\,\})}$ будет выполняться, если для каждой пары нуль-арных операций $\mathbf{d_j^a \in D_a}$ и $\mathbf{d_j^a \in D_b}$ справедливо

$$\mathbf{f(d_j^a(M_a)) = d_j^b(M_b)}\,, \tag{3}$$

а для любой пары **n**-арных операций $\mathbf{d_n^a \in D_a}$ и $\mathbf{d_n^a \in D_b}$ выполняется

$$\mathbf{f(d_n^a(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = d_n^b(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))}\,. \tag{4}$$

Наличие соотношений (3), (4) позволяет любой алгоритм некоторой алгебры $\mathbf{A_\tau(M_\tau,\ D_\tau)}$, $\tau \in \mathbf{T}$ переносить в любую другую алгебру множества **T**.

Каждый из эвристических методов или методов, основанных на случайном поиске, используемых для синтеза тестов цифровых устройств можно охарактеризовать с помощью двух алгебр:

$$\mathbf{A_1^T(M_1^T, D_1^T)}\,;\quad \mathbf{A_2^T(M_2^T, D_2^T)}\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{A_1^T}$ – алгебра сигнатуры $\mathbf{D_1^T} = \{\, \mathbf{d_1^{T1},\ d_2^{T1},\ \ldots,\ d_k^{T1}}\,\}$;

$\mathbf{d_j^{T1}\ (j = \overline{1,k}\,)}$ – операции алгебры, вводимые на множестве $\mathbf{M_1^T = \{\, m_1^1,\ m_2^1, \ldots, m_p^1,\ m_1^2,\ m_2^2, \ldots, m_p^2, \ldots,\ m_1^q, m_2^q, \ldots,\ m_p^q\,\}}$ тестовых наборов, подаваемых на **p** входов тестируемых цифровых устройств;

$\mathbf{A_2^T}$ – алгебра сигнатуры $\mathbf{D_2^T = \{\, d_1^{T2},\ d_2^{T2},\ \ldots,\ d_{\mathit{l}}^{T2}\,\}}$;

$\mathbf{d_r^{T2}\ (r = \overline{1,\mathit{l}}\,)}$ – операции алгебры $\mathbf{A_2}$, вводимые на множестве $\mathbf{M_2}$ возможных тестов рассматриваемого цифрового устройства;

$$\mathbf{\forall\ i, k\ \ m_k^i \in \{0, 1\},\ i = \overline{1,q}\,,\ k = \overline{1,p}}\,.$$

С помощью алгебры $\mathbf{A_1^T}$ осуществляется синтез отдельных тестовых наборов, а с помощью алгебры $\mathbf{A_2^T}$ – формирование лучшего теста.

Двумя алгебрами, подобными алгебрам (5), можно характеризовать и работу генетических алгоритмов

$$\mathbf{A_3^д(M_3^д,D_3^д)} \text{ и } \mathbf{A_4^д(M_4^д,D_4^д)}, \tag{6}$$

где $\mathbf{A_3^д}$ - алгебра сигнатуры $\mathbf{D_3^д} = \{\mathbf{d_1^{д3}}, \mathbf{d_2^{д3}}, \ldots, \mathbf{d_{kl}^{д3}}\}$, с помощью которой описываются механизмы получения новых особей, принадлежащих множеству $\mathbf{M_3^д} = \{\mathbf{m_1^{д1}}, \mathbf{m_2^{д1}}, \ldots, \mathbf{m_{kl}^{д1}}, \mathbf{m_1^{д2}}, \mathbf{m_2^{д2}}, \ldots, \mathbf{m_{kl}^{д2}}, \ldots, \mathbf{m_1^{дq1}}, \mathbf{m_2^{дq1}}, \ldots, \mathbf{m_{kl}^{дq1}}\}$;

$\mathbf{d_j^{д3}}\ (\mathbf{j} = \overline{\mathbf{1,k1}})$ - операции алгебры, вводимые на множестве $\mathbf{M_3^д}$; $\mathbf{m_1^{дd}}$, $\mathbf{m_2^{дd}}, \ldots, \mathbf{m_{kl}^{дd}}$ $(\mathbf{d}=\overline{\mathbf{1,q1}})$ – особи множества $\mathbf{M_3^д}$, каждая из которых содержит **k1** генов;

$\mathbf{A_4^д}$ - алгебра сигнатуры $\mathbf{D_4^д} = \{\mathbf{d_1^{д4}}, \mathbf{d_2^{д4}}, \ldots, \mathbf{d_{l1}^{д4}}\}$, с помощью которой формируются популяции, состоящие из множества отдельных особей, получаемых в общем случае как на текущем шаге алгоритма, так и на предшествующих шагах алгоритма и составляющих популяцию предшествующего шага работы алгоритма;

$\mathbf{M_4^д}$ - множество возможных популяций.

Наличие в генетических алгоритмах пары алгебр (6), аналогичных алгебрам (5), позволяет с помощью гомоморфизма алгебр привлечь генетические алгоритмы, хорошо зарекомендовавшие себя при решении сложных задач поиска глобальных экстремумов в многомерных и многоэкстремальных пространствах, для решения задач синтеза тестов цифровых устройств.

Получение тестовых наборов и тестовых последовательностей можно описать и с помощью более абстрактных математических объектов – категорий.

*Определение 5*. Категорией **K** называется пара **(Ob K, Mor K)**, состоящая из класса **Ob K**, элементы которого называются объектами и класса множеств **Mor K**, элементы которого называются морфизмами категории **K**. При этом объекты и морфизмы категории **K** обладают следующими свойствами.

1. Каждой упорядоченной паре объектов **A** и **B** сопоставляется множество морфизмов объекта **A** в объект **B**, причем, если **A**, **A`**, **B**, **B`** ∈ ∈ **Ob K** и **A** ≠ **A`** или **B** ≠ **B`**, то

$$\mathbf{Mor(A, B) \cap Mor(A`, B`) = \varnothing}.$$

2. В классе морфизмов для каждой тройки объектов **A**, **B**, **C** введена операция умножения морфизмов

$$\mathbf{Mor(B, C) \times Mor(A, B) = Mor(A, C)},$$

для которой выполняется закон ассоциативности

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$$

для всех $\alpha \in \mathbf{Mor(A, B)}$, $\beta \in \mathbf{Mor(B, C)}$, $\gamma \in \mathbf{Mor(C, D)}$.

3. Для каждого объекта $\mathbf{A \in Ob\ K}$ существует тождественный морфизм $\mathbf{1_A} \in \mathbf{Mor(A, A)}$ такой, что для всех $\alpha \in \mathbf{Mor(A, B)}$ верно соотношение

$$\alpha \mathbf{1_A} = \mathbf{1_A}\alpha = \alpha.$$

*Определение 6*. Если **K** и **K`** – категории, $\mathbf{Ob\ K` \subseteq Ob\ K}$, $\mathbf{Mor\ K` \subseteq Mor\ K}$, а операция умножения морфизмов в категории **K`** индуцирована операцией, определенной на множестве морфизмов категории **K**, то **K`** называется подкатегорией категории **K**.

Между алгебрами и категориями, описывающими одни и те же процессы, можно установить взаимосвязи. Рассмотрим эти взаимосвязи на примере алгебры $\mathbf{A_1^T(M_1^T, D_1^T)}$ и категории, отображающей процессы получения входных тестовых наборов

$$\mathbf{K_1 = (Ob\ K_1, Mor\ K_1)},$$

где $\mathbf{Ob\ K_1}$ - множество всех допустимых входных тестовых наборов для рассматриваемого цифрового устройства;

$\mathbf{Mor\ K_1}$ - множество морфизмов категории $\mathbf{K_1}$.

Множество объектов $\mathbf{Ob\ K_1}$ категории $\mathbf{K_1}$ можно задать совпадающим с множеством $\mathbf{M_1^T}$ $(\mathbf{Ob\ K_1 = M_1^T})$ или содержащим его $(\mathbf{Ob\ K_1 \supset M_1^T})$, а множество морфизмов $\mathbf{Mor\ K_1}$ рассматривать как множество $\mathbf{G_1}$, порожденное множеством $\mathbf{M_1^T}$ и сигнатурой $\mathbf{D_1^T}$ алгебры $\mathbf{A_1^T}$ или как более широкое множество, содержащее $\mathbf{G_1}$ в качестве своего подмножества $(\mathbf{Mor\ K_1 \supseteq G_1})$.

Подобным образом могут быть введены и другие категории $\mathbf{K_2 = (Ob\ K_2, Mor\ K_2)}$, $\mathbf{K_3 = (Ob\ K_3, Mor\ K_3)}$, $\mathbf{K_4 = (Ob\ K_4, Mor\ K_4)}$, соответствующие алгебрам $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_4}$.

Между категориями $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_3}$ и $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{K_4}$ при некоторых допущениях можно построить функторы.

*Определение 7*. Ковариантным функтором **F** из категории **K** в категорию **L** называется пара отображений $\mathbf{F = (F_O, F_M)}$ :

$$\mathbf{F_O: Ob\ K \to Ob\ L;\ F_M: Mor\ K \to Mor\ L}$$

со свойствами

$$\forall \gamma \in \mathbf{Mor\ K}\ [\gamma \in \mathbf{Mor_K(B, D)} \to \mathbf{F_M}(\gamma) \in \mathbf{Mor_L(F_O(B), F_O(D))}];$$
$$\forall \alpha,\gamma \in \mathbf{Mor\ K}\ [\mathbf{ran}(\alpha) = \mathbf{dom}(\gamma) \to \mathbf{F_M}(\gamma\alpha) = \mathbf{F_M}(\gamma)\mathbf{F_M}(\alpha)];$$
$$\forall \mathbf{B} \in \mathbf{Ob\ K}\ [\mathbf{F_M(1_B) = 1_{F_O(B)}}],$$

где индексы **K** и **L** указывают на принадлежность к категориям **K** и **L**;

**ran(α)** - область значений α;

**dom(γ)** - область определения γ.

В дальнейшем ковариантный функтор будем называть просто функтором.

*Определение 8*. Функтор **F** из категории **K** в категорию **L** называется унивалентным, если для любых объектов **B** и **D** категории **K** и $\gamma \in$ **Mor K** индуцированные отображения

$$\mathbf{Mor_K(B, D) \to Mor_L(F_O(B), F_O(D))},\ \gamma \to \mathbf{F_M}(\gamma)$$

инъективны.

*Определение 9*. Отображение $\varphi\mathbf{:\ B \to D}$ называется инъективным отображением или вложением, если равенство $\varphi(\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{b`})$ влечет за собой **b = b`** для любых **b**, **b`** $\in$ **B**.

Наличие функторов между категориями $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_3}$ и $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{K_4}$ открывает возможности для переноса алгоритмов из метода генетических алгоритмов в область синтеза тестов цифровых устройств. Этот подход является более универсальным, чем на основе гомоморфизма алгебр, поскольку здесь не накладываются ограничения, связанные со структурами алгебр.

С помощью аналогичных пар алгебр можно описать и поиск глобального экстремума функций многих переменных методом эволюционных стратегий [3], поиск оптимальных решений в многомерных и многоэкстремальных пространствах с помощью метода группового учета аргументов или эволюционного моделирования [4].

На основе выше изложенного алгебраического подхода был предложен спектр новых алгоритмов синтеза тестов для цифровых устройств:

1. Генетические алгоритмы синтеза тестов со стандартными наборами генетических операторов (частично известные алгоритмы [5 - 7]).

2. Генетические алгоритмы синтеза тестов с комбинированием эвристик.

3. Генетические алгоритмы синтеза тестов на параллельных вычис-

лительных структурах.

4. Алгоритмы синтеза тестов с использованием эволюционных стратегий.

5. Алгоритмы синтеза тестов с использованием метода группового учета аргументов.

6. Алгоритмы синтеза тестов с использованием эволюционного моделирования.

7. Алгоритмы синтеза тестов с внесением априорной информации.

Исследование ряда предложенных алгоритмов синтеза тестов с помощью математического моделирования подтвердило перспективность предлагаемого алгебраического подхода к получению новых эффективных средств для диагностики цифровых устройств.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
2. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
3. Стецюра Г.Г. Эволюционные методы в задачах управления, выбора и оптимизации // Приборы и системы управления. – 1998. – № 3. – С. 54 - 62.
4. Эволюционные методы компьютерного моделирования / А.Ф. Верлань, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Корсунов, В.А. Шорох – К.: Наукова думка, 1992. – 256 с.
5. O`Dare M.J., Arslan T. Generating test patterns for VLSI circuits using a genetic algorithm // IEE Electronic Letters. –1994. – Vol. 30, № 10. –P. 778 - 779.
6. Rudnick E.M. Simulation based techniques for sequential circuit testing: Ph. D. dissertation. – Urbana, Illinois, USA, 1994. – 110 p.
7. Іванов Д.Є. Розробка методів моделювання і тестування пошкоджених цифрових пристроїв у багатозначних алфавітах: Автореф. дис. ... к-та техн. наук: 05.13.13 / Донецький держ. техн. ун-т. – Донецьк, 2000. – 18 с.


*Поступила в редколлегию 22.8.2000*