

## ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦЫ ЭЛЕКТРОДА НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

д.ф.-м.н. С.С. Недорезов, Е.А. Ганенко, к.ф.-м.н. Т.В. Емельянова,  
д.т.н. Ю.С. Шмалый, К. Вейсс, проф. В.Е. Пустоваров

Предложена математическая модель частотного спектра локализованных колебаний резонаторов с выпуклыми пьезоэлементами с учетом скачка электрического потенциала на границе электрода. В рамках данной модели исследовано влияние границы электрода на собственные колебания пьезоэлемента, что существенно для получения оптимальных характеристик резонатора. Получено хорошее соответствие теории с результатами измерения частот негармонических мод кварцевой пластины SC - среза.

Современные прецизионные кварцевые источники частоты находятся на той стадии развития, когда дальнейшее повышение стабильности частоты традиционными методами достигается благодаря весьма заметным усилиям. Усовершенствование методов стабилизации частоты кварцевых резонаторов взаимосвязано с точным определением собственных частот колебаний резонатора [1].

Частота колебаний резонатора аппроксимируется разложением частотного спектра в ряд по степеням кривизны  $(1/R)$  пьезоэлемента [2]. Влияние гранич электрода произвольной формы на частотный спектр резонатора можно представить уравнением

$$(\omega_n^2 - \omega^2 + \widehat{L}_{nm})A_n(x_1, x_2) + \sum_{m \neq n} \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{L}_{nm} A_m^{(k)} = 0 \quad (1)$$

с нулевым граничным условием для функции  $A(x_1, x_2)$  на границе электрода. Здесь

$$A_m^{(1)} = \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} \widehat{L}_{nm} A_n, (m \neq n) \quad \text{и} \quad A_m^{(k)} = \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} \sum_{l \neq n} \widehat{L}_{ml} A_l^{(k-1)}, (k \geq 2), \quad (2)$$

где оператор

$$\widehat{L}_{nm} = -b_{\alpha\beta}^{nm} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + c_\alpha^{nm}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + d^{nm}(x_1, x_2).$$

© д.ф.-м.н. С.С. Недорезов, Е.А. Ганенко, к.ф.-м.н. Т.В. Емельянова,  
д.т.н. Ю.С. Шмалый, К. Вейсс, проф. В.Е. Пустоваров, 2000

Полиномы  $c_{\alpha}^{nm}(x_1, x_2)$  и  $d^{nm}(x_1, x_2)$  соответственно первого или второго порядка относительно  $x_1$  и  $x_2$  и тензор  $b_{\alpha\beta}^{nm}$  учитывают анизотропию и толщину выпуклого пьезоэлемента.

В рамках линейной пьезоэлектрической теории [2] частотный спектр собственных колебаний выпуклых пьезоэлементов, определяемых уравнением (1), имеет вид

$$\omega_{kl}^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\infty} \Omega_{\alpha\beta n} k^{\alpha} l^{\beta} + W_{kl}(n), \quad (3)$$

где 
$$\Omega_{\alpha\beta n} = \sum_{p=0}^{\infty} \Omega_{\alpha\beta n}^{(p)} R^{-(p+\alpha+\beta)/2}, \quad (4)$$

$k, l = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ;  $R$  – радиус кривизны пьезоэлемента. Здесь коэффициенты  $\Omega_{\alpha\beta n}^{(p)}$  выражаются через пьезоэлектрические константы [2], а  $W_{kl}(n)$  – матричные элементы оператора  $\hat{W}$ , описывающего влияние границ электрода на частотный спектр. В области частот [3] :

$$\omega_{kl}^2 - \omega_{00n}^2 \ll \Delta. \quad (5)$$

В качестве оператора  $\hat{W}$  можно взять нулевое граничное условие для колебаний ( $\Delta$  – скачок электрического потенциала на границе электрода).

В основном приближении по малому параметру  $1/R$  анализ влияния границы электрода на колебательный спектр можно провести [3] на основе уравнения

$$-d^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 A(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \left[ \omega_n^2 + c(x_1^2 + x_2^2) \right] A(x_1, x_2) = \omega^2 A(x_1, x_2) \quad (6)$$

с нулевым граничным условием для функции  $A(x_1, x_2)$  на границе  $\Gamma$  электрода

$$A(x_1, x_2) |_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

В уравнении (6) тензор  $d^{\alpha\beta}$  и постоянная  $c$  учитывают анизотропию и толщину  $L(x_1, x_2)$  выпуклого пьезоэлемента и зависят от номера  $n$  частоты рассматриваемой гармоники. В собственных осях  $x, y$  тензора  $d^{\alpha\beta}$  уравнение (6) примет вид

$$-d_1 \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} - d_2 \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial y^2} + \left[ \omega_n^2 + c(x^2 + y^2) \right] A(x, y) = \omega^2 A(x, y) \quad (8)$$

с граничным условием  $A(\bar{x})|_{\Gamma} = 0$ , где  $d_1, d_2$  – собственные значения тензора  $d^{\alpha\beta}$ . Для оценки влияния границ электрода введем оператор

$$\hat{B} = d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

и составим дифференциальное соотношение

$$\mathbf{U}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{V} - \mathbf{V}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{U} = \nabla\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}), \quad (9)$$

в котором  $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  равен

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{d}_1 \left( \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} \right) \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{d}_2 \left( \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{y}} - \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}} \right) \bar{\mathbf{j}}. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{V} \equiv \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}})$  - решение уравнения (8),  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}')$  - функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left( \widehat{\mathbf{B}} - \omega^2 - \bar{\omega}_n^2 - \zeta \bar{\chi}^2 \right) \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}') = -4\pi \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'), \quad (11)$$

где  $\delta(\bar{\mathbf{x}})$  -  $\delta$ -функция, а  $\bar{\mathbf{x}} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Из (7) и (11) для  $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}')$  получаем интегральное соотношение

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}') \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}) \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}') \right] \mathbf{d}^2 \bar{\mathbf{x}}, \quad (12)$$

в котором  $S$  - проекция электрода на плоскость  $\mathbf{xOy}$ . Используя формулу Грина

$$\iint_S (\mathbf{U}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{V} - \mathbf{V}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{U}) \mathbf{d}^2 \bar{\mathbf{x}} = \oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{d}l \quad (13)$$

и граничное условие (7), приводим равенство (12) к виду

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}') = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}') \left( \mathbf{d}_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{d}_2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}} \bar{\mathbf{j}} \right) \bar{\mathbf{N}} \mathbf{d}l, \quad (14)$$

где  $\Gamma$  - контур, соответствующий границе электрода,  $\bar{\mathbf{N}}$  - нормаль к контуру  $\Gamma$ .

Функция Грина  $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}')$  определяется выражением

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}') = 4\pi \sum_{\mathbf{k}, l} \frac{\Psi_{\mathbf{k}l}(\bar{\mathbf{x}}) \Psi_{\mathbf{k}l}(\bar{\mathbf{x}}')}{\omega^2 - \bar{\omega}_{\mathbf{k}n}^2}, \quad (15)$$

где  $\Psi_{\mathbf{k}l}(\bar{\mathbf{x}}) = \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \Psi_l(\mathbf{y})$  и  $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi \lambda^2} \sqrt{k! 2^{k/2}}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{x}}{\lambda} \right)^2} \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \left( \frac{\mathbf{x}}{\lambda} \right)$  - соб-

ственные функции гармонического осциллятора;  $\lambda = \lambda(\mathbf{n})$ ;  $\lambda^{-1} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}}$ ;  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1$ ,

$\mathbf{d}_2$ ;  $\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{x})$  - полином Эрмита. Здесь  $\bar{\omega}_{\mathbf{k}n}^2$  - частотный спектр локализованных внутри электрода колебаний без учета влияния его границы

$$\bar{\omega}_{\mathbf{k}n}^2 = \omega_n^2 + \Omega_{10n} \left( \mathbf{k} + \frac{1}{2} \right) + \Omega_{01n} \left( l + \frac{1}{2} \right), \quad (16)$$

где  $\mathbf{k}, l = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\Omega_{10n} = 2\sqrt{cd_1}$ ,  $\Omega_{01n} = 2\sqrt{cd_2}$ . Решение уравнения (8) может быть представлено в виде

$$A(\vec{x}) = \sum_{\mathbf{k}, l} A_{\mathbf{k}l} \Psi_{\mathbf{k}l}(\vec{x}). \quad (17)$$

Подставляя (15) и (17) в уравнение (14) для коэффициентов  $A_{\mathbf{k}l}$ , получаем систему уравнений

$$A_{\mathbf{k}l} = \sum_{\mathbf{k}', l'} \frac{W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'l'}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}'l'n}^2} A_{\mathbf{k}'l'}, \quad (18)$$

где 
$$W_{\mathbf{k}l, \mathbf{k}'l'} = \int_{\Gamma} \Psi_{\mathbf{k}l}(\vec{x}) \left( d_1 \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + d_2 \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \Psi_{\mathbf{k}'l'}(\vec{x}) \vec{N} d\Gamma. \quad (19)$$

Систему уравнений (18) решаем по теории возмущений. В результате, ограничиваясь в (3) квадратичным приближением, для частотного спектра имеем

$$\omega_{\mathbf{k}l'n}^2 = \Omega_{00n} + \Omega_{10n}k + \Omega_{01n}l + \Omega_{11n}kl + \Omega_{20n}k^2 + \Omega_{02n}l^2 + W_{\mathbf{k}l}(\mathbf{n}), \quad (20)$$

где  $W_{\mathbf{k}l}(\mathbf{n}) \equiv W_{\mathbf{k}l, \mathbf{k}l}$  описывает влияние границы электрода вблизи основной частоты  $\omega_n$ .

В работе [5] исследовано влияние формы электрода на частотный спектр. Показано проявление некоторых особенностей формы электрода на частотный спектр. В данной работе рассмотрены кварцевые резонаторы, работающие на ангармонический антисимметричный моде [6], с электродом специальной формы [7] (рис.1). Измерены негармонические моды кварцевой пластины SC – среза диаметром 14 мм, радиусом кривизны 700 мм и частотой основной моды третьего обертона 10 019 821 герц. Результаты эксперимента приведены в табл.1.

Таблица 1

Негармонические моды кварцевой пластины SC – среза

Мода	$\omega_{\mathbf{k}l}$ (экспер.), Гц	Угол возбуждения $\alpha_{\mathbf{k}l}$ , град	$W_{\mathbf{k}l}(\mathbf{3})$ , (Hz) <sup>2</sup>	$\omega_{\mathbf{k}l}$ (расчит.), Гц
0 0 3	10 019 821	- 90	$7,52260204 \cdot 10^{10}$	
0 1 3	10 059 691	+ 5	$4,3618865 \cdot 10^{10}$	10 059 657
0 2 3	10 098 620	- 50	$1,26277746 \cdot 10^9$	10 098 511
0 3 3	10 138 794	- 25	$9,24933 \cdot 10^8$	10 138 996
0 4 3	10 179 084	- 80	0	10 178 999
1 0 3	10 057 616	- 60	$3,6145188 \cdot 10^{10}$	10 057 411
2 0 3	10 095 326	- 90	$1,2458251 \cdot 10^{10}$	10 095 497
3 0 3	10 133 963	+ 60	$7,50367 \cdot 10^8$	10 133 902
4 0 3	10 172 575	- 120	$7,298 \cdot 10^7$	10 173 578

Поправки  $W_{kl}(3)$  рассчитаны для электродов, изображенных на рис.1 ( $\alpha_{kl}$  – угол возбуждения, а угол  $\alpha_0$  равен  $85^0$ ). Измерения проводились на внешних электродах, лежащих в одной плоскости. Ширина электродов составляла 4 мм, радиус выводов – 2 мм и расстояние между электродами равно 1,5 мм.

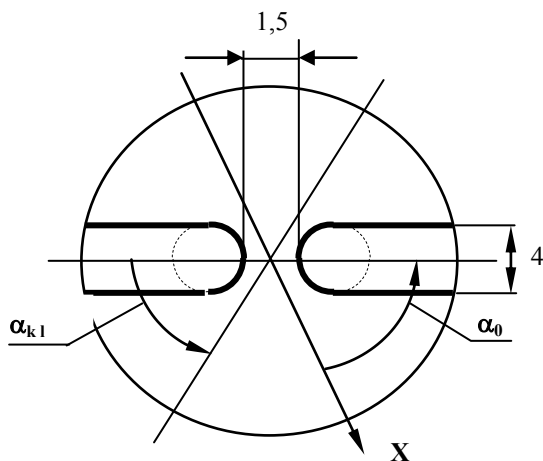


Рис. 1. Размещение электродов на кварцевой пластине

Вычисленные значения частот  $\omega_{kl3}$  и поправок  $W_{kl}(3)$ , учитывающие влияние границы электрода на частотный спектр, приведены в табл.1. Значения параметров частотного спектра  $\Omega_{\alpha\beta3}$  определены методом наименьших квадратов и приведены в табл.2.

Таблица 2

Значения параметров частотного спектра  $\Omega_{\alpha\beta3}$

$\alpha, \beta$	$\Omega_{\alpha\beta3}, \text{Hz}^2$
0, 0	$1,0032155 \cdot 10^{14}$
1, 0	$7,9512240 \cdot 10^{11}$
0, 1	$8,3450148 \cdot 10^{11}$
2, 0	$- 1,2975227 \cdot 10^9$
0, 2	$- 2,9703833 \cdot 10^9$

Для расчета значений  $W_{kl} \equiv W_{kl,kl}$  с использованием формулы (19) не требуется дополнительных параметров. Необходимо лишь задание размеров электрода.

Проведенный анализ показывает, что предложенная математическая модель [20] частотного спектра позволяет получить достаточно точное описание частот собственных колебаний резонаторов с выпуклыми пьезоэлементами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shmaliy Yu. S. The modulational method of quartz crystal oscillator frequency stabilization // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. – 1998. – Vol. 45, №. 6. – P. 1476 - 1484.

2. Nedorezov S.S., Ganenko E.A. Frequency spectrum of the piezoelectric resonators // Dopovidi NAN Ukraine. – 1996. – № 10. – P. 31 – 35. – Oct. 1996 (in Ukrainian), Proc. of the Int. Symp. on AFSG (Moscow - St. Peterburg), 1998. – P. 89 - 92.

3. Недорезов С.С. Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов // Известия вузов СССР, Радиофизика. – 1990. – №12. – С. 1417 - 1422.

4. Ганенко Е.А., Недорезов С.С. Собственные колебания пьезоэлектрических резонаторов // Информационные системы. – Харьков: НАНУ, ПАНИ, ХВУ. – 1998. – Вып.1(19). – С. 21 - 26.

5. Ганенко Е.А., Емельянова Т.В., Недорезов С.С., Шмалий Ю.С. Локализованные колебания анизотропных пьезоэлектрических резонаторов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 1999. – Вип.1(5). – С.104 - 109.

6. Weiss K., Szulc W. The SC - cut lateral field quartz resonator working in anharmonic antisymmetric mode. – Proc 12 - th EFTF, 1998.

7. Nedoresov S.S., Ganenko A., Emel'yanova T.V., Shmaliy Yu.S., Weiss K. Influence of the electrode boundary on the frequency spectrum of localized thickness-shear vibrations of the piezoelectric resonator // Proc. of International Forum on Wave Electronics and Its Applications. – St. Peterburg, 2000.

*Поступила в редколлегию 12.8.2000*

---