УДК 624.31

ОБОСНОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ДОСТИЖЕНИЯ ТРЕБУЕМОЙ ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

д.т.н., проф. В.П. Деденок, к.т.н. В.А. Кочура, Е.В. Мигура

В статье на основе анализа традиционных подходов к определению и сопоставлению качества оценивания параметров обосновывается критерий достижения требуемой точности при оценке векторных параметров. Обсуждаются проблемы практического использования разработанного критерия.

При решении задач баллистико - навигационного обеспечения функционирования космических аппаратов (КА) и организации наблюдений за космическими объектами (КО) в интересах контроля и анализа космической обстановки возникает необходимость контролировать насколько текущая или планируемая точность оценивания вектора орбитальных параметров соответствует требуемой. Так, например, при ведении каталога КО внесение параметров орбиты нового КО либо уточненных орбитальных параметров, находящихся на сопровождении КО, допускается лишь при условии, что точность оценок этих параметров не хуже требуемой. Аналогичный контроль соответствия достигаемой (либо планируемой достигнуть) точности оценивания заданному уровню точности необходимо осуществлять при планировании и организации подтверждений по группировкам или отдельным КО. При этом, обычно минимизируются затраты на проведение наблюдений, а условие получения точности оценок параметров не хуже заданной выступает в качестве ограничения. Учитывая многомерность навигационных параметров, одной из центральных проблем в рассмотренных выше задачах является выбор меры точности и критериев сравнения качества получаемых оценок между собой и с требуемым (заданным) уровнем точности.

В классической литературе по математической статистике и теории оценивания [1] определены общие подходы к сравнению качества оценок, основанные на сопоставлении матриц моментов второго порядка распределений этих оценок. Применительно к несмещенным оценкам правило (критерий) предпочтения оценок может быть сформулировано следующим образом: оценка $\hat{\mathbf{P}}$ лучше (не хуже), чем $\hat{\mathbf{P}}_1$, если среднеквадратическое рассеивание $\hat{\mathbf{P}}$ относительно истинного значения $\mathbf{P}_0$

меньше (не больше), чем среднеквадратическое рассеивание $\hat{\mathbf{P}}_1$ относительно этой же точки $\mathbf{P}_0$ [1]. Математическое выражение соответствующее этому критерию имеет вид

$$\mathbf{M}(\nu^{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{P}}-\mathbf{P_0}))^2 \le \mathbf{M}(\nu^{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{P}}_1-\mathbf{P_0}))^2, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}$ - произвольный вектор такой же размерности, что и вектор оценивания параметров; $\mathbf{M}(.)$ - символ вычисления математического ожидания.

Левая часть (1) характеризует степень рассеивания $\hat{\mathbf{P}}$ относительно $\mathbf{P}_0$, а правая - степень рассеивания $\hat{\mathbf{P}}_1$. Если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}_1$ соответственно ковариационные матрицы распределения оценок $\hat{\mathrm{P}}$ и $\hat{\mathbf{P}}_1$, то (1) может быть приведено к эквивалентному виду

$$\nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \nu \le \nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K_1} \cdot \nu. \tag{2}$$

Выполнение неравенства (2) означает, что по любому направлению (при любом фиксированном значении ν) рассеивание распределения $\hat{\mathbf{P}}$ (т.е. дисперсия проекции $(\hat{\mathbf{P}}-\mathbf{P_0})$ на ν) не превосходит рассеивание $\hat{\mathbf{P}}_1$. Легко заметить, что модуль ν несущественен, поскольку от него левая и правая часть (2) зависят одинаково и может быть принято ν=1. Если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K_1}$ невырожденные матрицы, то (2) полностью эквивалентно соотношению

$$\nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \nu \ge \nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}_1^{-1} \cdot \nu. \tag{3}$$

Соотношение (3) можно трактовать с использованием понятия эллипсоидов рассеивания распределений [1]. Оценка $\hat{\mathrm{P}}$ не хуже (в смысле степени рассеивания) $\hat{\mathbf{P}}_1$ ***тогда и только тогда***, когда эллипсоид рассеивания для $\hat{\mathrm{P}}$ лежит в эллипсоиде рассеивания для $\hat{\mathbf{P}}_1$. Классические критерии предпочтения оценок (2,3) целесообразно распространить и на случай, когда необходимо сопоставить точность некоторой оценки $\hat{\mathrm{P}}$ с требуемой точностью оценивания. При этом, если требуемая точность задается ковариационной матрицей $\mathbf{K}_{\mathbf{тр}}$ желаемого вида, то в (2) и (3) вместо $\mathbf{K_1}$ должна использоваться $\mathbf{K}_{\mathbf{тр}}$:

$$\nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \nu \le \nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{тр}} \cdot \nu, \tag{4}$$

$$\nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \nu \ge \nu^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{тр}}^{-1} \cdot \nu, \tag{5}$$

где $\mathbf{K}$ - ковариационная матрица распределения оценки $\hat{\mathrm{P}}$, точность которой сопоставляется с требуемой точностью. Для (4) и (5) справедливы все свойства и трактовки, сформулированные для (2) и (3) с той лишь разницей, что вместо характеристик качества курирующей оценки следует использовать характеристики (степень рассеивания, эллипсоид рассеивания и т.д.), определяемые требуемым уровнем точности (матрицей $\mathbf{K}_{тр}$).

В соответствии с (4) и (5) по определению принимается, что точность оценки $\hat{\mathrm{P}}$ не хуже требуемой, если по каждому из всех возможных направлений (при любом ν) дисперсия ее распространения (степень рассеивания) не превосходит требуемых значений (задаваемых $\mathbf{K}_{тр}$), или, что эквивалентно, ее эллипсоид рассеивания целиком лежит в требуемом эллипсоиде рассеивания, задаваемом матрицей $\mathbf{K}_{тр}$.

Существенным неудобством практического использования критериев (4) и (5) является то, что необходимо сопоставлять рассеивание по всем возможным направлениям, вследствие чего сравниваемые функции качества $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{K}, \nu)$ и $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{K}_{тр}, \nu)$ зависят не только от элементов соответствующих ковариационных матриц, но и от свободного вектора ν. Вместе с тем определяющими здесь являются значения элементов матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}_{тр}$, поскольку именно они, как известно [1], содержат в себе всю информацию о качестве несмещенных оценок. Роль свободного вектора ν в соотношениях (2-5) сводится к стимулированию необходимости проверки степени рассеивания конкурирующих оценок <u>по каждому</u> из возможных направлений в пространстве оцениваемых параметров. Выбор лишь некоторых из возможных направлений (осей координат, главных осей симметрии эллипсоидов рассеивания и т.д.), по которым осуществляется сопоставление рассеивания конкурирующих оценок, является недостаточным и не может гарантировать выполнение условий (2-5). Определенный произвол в выборе меры точности многомерных оценок, когда полностью или частично игнорируется роль вектора ν, имеет место в большинстве теоретических и прикладных работ по оптимизации планирования экспериментов и наблюдений. Например, рассматриваются и нашли практическое применение такие наиболее известные меры точности как [2,3]:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{K}) = \mathbf{Sp}\ (\mathbf{K}) \quad \text{– A - оптимальность;} \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{K}) = \mathbf{det}\ (\mathbf{K}) \quad \text{– D - оптимальность;} \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{K}) = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}\ (\mathbf{K}) \quad \text{– E - оптимальность;} \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{K}) = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{2}}(\mathbf{K}) \quad \text{– L - оптимальность,} \qquad (9)$$

где $\mathbf{Sp}\ (\mathbf{K})$ и $\mathbf{Sp}\ (\mathbf{K})$ - след и определитель матрицы $\mathbf{K}$; $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}\ (\mathbf{K})$ - максимальное собственное число (спектральный радиус) матрицы $\mathbf{K}$; $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{2}}(\mathbf{K})$ - дисперсия одной из составляющих вектора оценивания параметров (один из элементов главной диагонали матрицы $\mathbf{K}$).

Перечисленные меры точности и соответствующие им критерии оптимальности далеко не исчерпывают всех известных и применяемых на практике. Можно показать, что использование мер точности (6-9) для сопоставления достигнутой точности оценивания с требуемой

$$\varphi(\mathbf{K}) \le \varphi(\mathbf{K}_{тр}) \qquad (10)$$

не гарантируют в многомерном случае, что степень рассеивания оценки $\hat{\mathbf{P}}$ не хуже заданной (т.е. выполнение условий (4,5). Легко убедиться, что, если

$$\mathbf{K} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0{,}5} \\ \mathbf{0{,}5} & \mathbf{1} \end{Vmatrix}, \quad \text{а} \quad \mathbf{K} = \begin{Vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1{,}2} \end{Vmatrix}, \qquad (11)$$

то по любому из показателей (6-9) критерий (10) выполняется и, следовательно, должно приниматься решение о том, что точность оценки $\hat{\mathbf{P}}$ не хуже требуемой, определяемой матрицей $\mathbf{K}_{тр}$. Однако, сопоставление степени рассеивания распределения оценки $\hat{\mathbf{P}}$ по всем возможным направлениям (как это предписывает, например, условие (4)), не дает оснований утверждать, что точность оценки $\hat{\mathbf{P}}$ не хуже требуемой. Для того, чтобы выполнилось условие (4), как известно [4], необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathbf{B= (K_{тр}-K)}$ была неотрицательно определенной. В рассмотренном же нами примере $\mathbf{B}$ отрицательно определенная матрица.

Таким образом, подкупающая простота мер точности (6-9), в которых по существу игнорируется необходимость сопоставления в многомерном случае рассеивания конкурирующих оценок по каждому из возможных направлений (роль вектора $\boldsymbol{\nu}$) приводит во многих случаях к ошибочным выводам. Следовательно, эти меры точности и основанные на них критерии в лучшем случае можно рассматривать как эвристические либо квазиоптимальные, а их многообразие является следствием отказа от поиска более строгого подхода при решении задач сопоставления качества оценок векторных параметров.

Рассмотрим возможности получения строгого критерия достижения требуемой точности оценивания на основе соотношений (4, 5), в котором бы, если это возможно, зависимость от $\boldsymbol{\nu}$ в явном виде отсутствовала. Учитывая положительную определенность матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}_{тр}$, преобразуем (4) и (5) к эквивалентному виду:

$$\frac{\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{тр}} \cdot \boldsymbol{\nu}} \le \mathbf{1}\,; \qquad (12)$$

$$\frac{\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{тр}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\nu}} \ge \mathbf{1}\,. \qquad (13)$$

Левые части соотношений (12) и (13) являются функциями вектора $\boldsymbol{\nu}$, однако используя известные свойства обобщенного отношения Релея [4] можно утверждать, что для любого вектора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mu_{min} \le \frac{\nu^T \cdot K^{-1} \cdot \nu}{\nu^T \cdot K_{тр}^{-1} \cdot \nu} \le \mu_{max} \ , \tag{14}$$

где μ_{min} и μ_{max} - минимальное и максимальное собственные значения матрицы $(K_{тр}\cdot K^{-1})$ соответственно. С учетом (13) и (14) для выполнения условий (12), (13) при любом значении вектора ν необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_{min}(K_{тр}\cdot K^{-1}) \ge 1. \tag{15}$$

Проверка критерия (15) не требует непосредственного сопоставления рассеивания конкурирующих оценок по всем возможным направлениям (для всех ν), поскольку (15) соответствует проверке по наихудшему (в смысле рассеивания) направлению. Критерий (15) полностью эквивалентен условиям (4), (5) и в тоже время для его использования необходимо и достаточно лишь знание матриц **К** и $K_{тр}$. Если воспользоваться этим критерием для условий числового примера (11), то получим

$$\mu_{min}(K_{тр}\cdot K^{-1}) \approx 0{,}547 < 1.$$

Следовательно, гипотеза о достижении точности оценивания не хуже требуемой в соответствии с критерием (15) отвергается. Определенные трудности практического использования критерия (15) возникают при большой размерности (m) вектора оцениваемых параметров. Уже при m>3 они становятся значительными. Для упрощения практического применения (15) в этих условиях могут быть предложены квазиоптимальные критерии. Так, например, мажорирующий аналог (15) может быть представлен в виде

$$Q=(Sp\ (K\cdot K_{тр}^{-1}))^{-1} \ge 1. \tag{16}$$

Он основан на использовании известного факта, состоящего в том, что

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu_i}\right)^{-1} < \mu_{min} \ , \tag{17}$$

где $\{\mu_i\}$- спектр собственных значений матрицы $(K\cdot K_{тр}^{-1})$. Критерий (16) является более жестким, чем (15) и имеет преимущество при практическом использовании, поскольку не требует вычисления спектра матрицы $(K\cdot K_{тр}^{-1})$. Заслуживают внимания варианты использования необходимых условий выполнения критерия (15), основанных на использовании среднего арифметического и среднего геометрического собственных чисел $\{\mu_i\}$:

$$\mu_{с.а.} = \frac{1}{m} Sp(K_{тр} \cdot K^{-1}) > 1\,; \tag{18}$$

$$\mu_{с.г} = \sqrt[m]{\det(K_{тр} \cdot K^{-1})} > 1\,. \tag{19}$$

Хотя оба эти критерия являются более слабыми, чем (15), так как они определяют только необходимые условия достижения требуемой точности, они все могут найти практическое применение. Их можно рассматривать как квазиоптимальные приближения к (15) и в этом смысле они могут составить серьезную конкуренцию критериям типа (10), основанным на использовании мер точности (6) и (7) соответственно. Как минимум при использовании (18) и (19) не возникает трудностей и противоречий, характерных для (6), (7), в тех случаях, когда составляющие вектора оцениваемых параметров имеют разную размерность в физическом смысле.

Следует также отметить, что введенные определения меры качества оценок и критерии достижения требуемой точности оценивания базируются на классических подходах сопоставления качества оценок векторных параметров. Они являются общими и строгими. Полученные результаты распространяются на случай, характерный для этапов проектирования систем обработки и планирования сбора наблюдений о параметрах орбитального движения КО, когда вместо апостериорной ковариационной матрицы $\mathbf{K}$ оперируют потенциально достижимой точностью, определяемой информационной матрицей Фишера $\mathbf{G}$. Для этого достаточно в соотношениях (12 – 16) вместо $\mathbf{K}$ использовать $\mathbf{G}^{-1}$. Обоснованные подходы и критерии могут быть обобщены на случай, когда требуемая точность оценивания навигационных параметров задается не в виде матрицы $\mathbf{K}_{\text{тр}}$ (точечное оценивание), а в виде критериальной области и доверительной вероятности «накрытия» этой области истинного значения вектора параметров (интервальное оценивание).

Применение предложенного оптимального критерия и его квазиоптимальных аналогов позволяет более строго осуществлять контроль соответствия текущей (либо планируемой) точности оценивания навигационных параметров требуемому уровню точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Наука, 1984. – 427 с.

2. Математическая теория планирования эксперимента / Под ред. С.М. Ермакова. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

3. Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах / М.Ф. Решетнев, А.А. Лебедев, В.А. Бартенев и др.– М.: Машиностроение, 1988. – 336 с.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Поступила в редколлегию 14.11.2000