

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

к.ф.-м.н. Л.Д. Филатова  
(представил д.ф.-м.н., проф. Ю.Г. Машкаров)

Для исследования дискретных систем предложен алгебраический метод. Его новизна заключается в том, что элементы системы и элементы некоторого поля идентифицируются, а предикаты, описывающие функционирование системы, представляются теоретико-функциональными полиномами над этим полем.

Любая реальная дискретная система определяется заданием ее элементов и отношений между ними. В математике под системой понимают совокупность  $S = (A; R_1, R_2, \dots, R_m)$ , где  $R_1, R_2, \dots, R_m$  — некоторые предикаты над множеством  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Элементы множества  $A$  называют элементами системы [1].

В дальнейшем элементы системы будем идентифицировать числами из множества  $Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  ( $a_1 = 0, a_2 = 1, \dots, a_n = n - 1$ ). Для представления предикатов теоретико-функциональными полиномами определим поле над множеством  $Z_0$ . Операцию сложения поля обозначим через  $*$ , операцию умножения через  $\circ$ . Поле определим по индукции, т.е. последовательно для множеств  $P_0 = \{0, 1\}$ ,  $P_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \dots$ ,

$$P_k = \{0, 1, \dots, 2^{2^k} - 1\}, \dots$$

Поле над  $P_0\{0, 1\}$  определим так: операция сложения – сложение по модулю два, умножение – обычное. Полученное поле обозначим через  $\Pi_0$ .

Каждый элемент множества  $P_1$  однозначно представляется в виде  $a + 2b$  ( $a, b \in P_0$ ). Сложение и умножение элементов множества  $P_1$  определим равенствами:

$$(a_1 + 2b_1) * (a_2 + 2b_2) = (a_1 * a_2) + 2(b_1 * b_2);$$

$$(a_1 + 2b_1) \circ (a_2 + 2b_2) = (a_1 a_2 * b_1 b_2) + 2(a_1 b_2 * a_2 b_1 * b_1 b_2).$$

Если  $b_1 = a_2 = 0$ , то из первого равенства следует, что

$$\mathbf{a}_1 * 2\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{b}_2,$$

а из второго равенства

$$\mathbf{a}_1 \circ 2\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2; \quad \mathbf{a}_1 \circ 2 = 2\mathbf{a}_1.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 * 2 \circ \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 * 2\mathbf{b}_1.$$

Легко проверить, что в отношении операции сложения множество  $\mathbf{P}_1$  образует абелеву группу, т.е. поле  $\mathbf{P}_1$  над множеством  $\mathbf{P}_1$  определено.

Предположим далее, что поля над множествами  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$  определены. Обозначим их соответственно  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$ . Исходя из этого предположения, определим поле  $\mathbf{P}_k$  над множеством  $\mathbf{P}_k$  ( $k \geq 2$ ). Каждый элемент множества  $\mathbf{P}_k$  единственным образом представляется в виде  $\mathbf{a} + 2^{2^{k-1}} \cdot \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{P}_{k-1}$ . Операцию сложения двух элементов определим равенством

$$(\mathbf{a}_1 + 2^{2^{k-1}} \mathbf{b}_1) * (\mathbf{a}_2 + 2^{2^{k-1}} \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 * \mathbf{a}_2) + 2^{2^{k-1}} (\mathbf{b}_1 * \mathbf{b}_2).$$

При  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$  имеем

$$\mathbf{a}_1 * 2^{2^{k-1}} \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + 2^{2^{k-1}} \mathbf{b}_2. \quad (1)$$

Легко проверяется, что в отношении введенной операции  $\mathbf{P}_k$  образует абелеву группу, причем каждый элемент является противоположным самому себе.

Если операцию умножения определить равенством

$$(\mathbf{a}_1 + 2^{2^{k-1}} \mathbf{b}_1) \circ (\mathbf{a}_2 + 2^{2^{k-1}} \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \cdot 2^{2^{k-2}} \circ 2^{2^{k-3}} \circ \dots \circ 2) + (2) \\ + (\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \circ \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2) 2^{2^{k-1}},$$

то легко убедиться в том, что в отношении введенных операций множество  $\mathbf{P}_k$  является полем  $\mathbf{P}_k$ .

Поля над множествами  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots$  определены так, что поле  $\mathbf{P}_{k-1}$  является подполем поля  $\mathbf{P}_k$ . Таким образом, мы получили счетное множество вложенных друг в друга полей. Любая пара чисел  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  из множества  $\mathbf{Z}_0$  принадлежит некоторому множеству  $\mathbf{P}_k$ , поэтому операция

сложения и умножения определены над множеством  $Z_0$ . Поле над множеством  $Z_0$  обозначим через  $\Pi$ .

Рассмотрим теоретико-функциональные полиномы над полем  $\Pi_k$ . Общий вид этих полиномов имеет вид

$$\sum_{i_j=0, 2^{2^k}-1} a_{i_1, i_2, i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_p^{i_p}, \quad (3)$$

где коэффициенты  $a_{i_1, i_2, \dots, i_p} \in \Pi_k$  и переменные  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \Pi_k$ .

В выражении (3) операции сложения и умножения рассматриваются в смысле операций поля  $\Pi_k$  (и в дальнейшем операции сложения и умножения будут применяться только в смысле операций поля  $\Pi_k$ ). В частном случае, когда  $k=0$ , полином (3) называется полиномом Жегалкина [2].

Любая функция  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , где переменные  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \Pi_k$ , единственным образом может быть представлена в виде полинома (3). А так как и каждый полином вида (3) определяет единственную функцию, то между множеством полиномов и множеством функций существует взаимно - однозначное соответствие. Поэтому каждый полином может рассматриваться как стандартное представление некоторой функции. Может быть предложен алгоритм, позволяющий переходить от других представлений функций, например от табличных и полиномиальных. Так как любому предикату над множеством  $\Pi_k$  тоже соответствует единственный полином, то система  $S=\{\Pi_k, R_1, R_2, \dots, R_m\}$  однозначно представима  $m$  полиномами.

Рассмотрим случай, когда  $2^{2^{k-1}} < n \leq 2^{2^k}$  ( $n$  - число элементов системы). Пусть дана функция  $y=f_1(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , где переменные  $x_1, x_2, \dots, x_p$  принимают значения из множества  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Определим функцию  $y=f^*(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , где переменные  $x_1, x_2, \dots, x_p$  принимают значения из множества  $\Pi_k$  следующим образом:

$$y=f^*(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_p) & \text{при } x_j \in \{0; 1; 2; \dots, n-1\}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Функция  $y=f^*(x_1, x_2, \dots, x_p)$  уже может быть представлена в виде полинома (3). Но используя условия (4), можно исключить все члены полинома, содержащие  $x_j^{i_j}$ , у которых  $i_j \geq n$ :

$$x_j^{i_j} = \alpha_{0i_j} + \alpha_{1i_j} x_j + \dots + \alpha_{n-1,i_j} x_j^{n-1}. \quad (5)$$

Следовательно, любая функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$  единственным образом может быть представлена полиномом вида

$$\sum_{ij=1, n-1} a_{i_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}. \quad (6)$$

Два полинома вида (6) при всех наборах значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_p$  из  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  принимают равные значения тогда и только тогда, когда все коэффициенты полиномов с одинаковыми индексами равны друг другу. Над полиномами могут быть произведены операции сложения, умножения и суперпозиции, но при этом должно быть учтено соотношение (5).

Следовательно, любая система  $S = (A; R_1, R_2, \dots, R_m)$ , где  $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , единственным образом может быть представлена  $m$  полиномами вида (6). При этом легко указать алгоритм перехода от другого представления системы, например от табличного к полиномиальному и наоборот. Полиномиальное представление систем позволяет производить операции над различными системами применением алгоритмов, единых для всех систем и тождественное преобразование систем, а также разработать стандартные программы для исследования различных систем с применением ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. – М.: Мир, 1972. – 380 с.
2. Яблонский С.В. и др. Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966. – 154 с.

*Поступила в редколлегию 13.11.2000*