УДК 517.9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

к.ф.-м.н. Л.Д. Филатова
(представил д.ф.-м.н., проф. Ю.Г. Машкаров)

Для исследования дискретных систем предложен алгебраический метод. Его новизна заключается в том, что элементы системы и элементы некоторого поля идентифицируются, а предикаты, описывающие функционирование системы, представляются теоретико-функциональными полиномами над этим полем.

Любая реальная дискретная система определяется заданием ее элементов и отношений между ними. В математике под системой понимают совокупность $\mathbf{S} = (\mathbf{A}; \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}, ..., \mathbf{R_m})$, где $\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}, ..., \mathbf{R_m}$ — некоторые предикаты над множеством $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}\}$. Элементы множества $\mathbf{A}$ называют элементами системы [1].

В дальнейшем элементы системы будем идентифицировать числами из множества $\mathbf{Z_0} = \{0, 1, 2, ...\}(\mathbf{a_1} = 0, \mathbf{a_2} = 1, ..., \mathbf{a_n} = \mathbf{n} - 1)$. Для представления предикатов теоретико - функциональными полиномами определим поле над множеством $\mathbf{Z_0}$. Операцию сложения поля обозначим через *, операцию умножения через ∘. Поле определим по индукции, т.е. последовательно для множеств $\mathbf{P_0} = \{0,1\}$, $\mathbf{P_1} = \{0,1,2,3\}, ...,$ $\mathbf{P_k} = \{0,1,..2^{2^k} - 1\}, ...$

Поле над $\mathbf{P_0}\{0,1\}$ определим так: операция сложения – сложение по модулю два, умножение – обычное. Полученное поле обозначим через $\mathbf{\Pi_0}$.

Каждый элемент множества $\mathbf{P_1}$ однозначно представляется в виде $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{P_0})$. Сложение и умножение элементов множества $\mathbf{P_1}$ определим равенствами:

$$(\mathbf{a_1} + 2\mathbf{b_1}) * (\mathbf{a_2} + 2\mathbf{b_2}) = (\mathbf{a_1} * \mathbf{a_2}) + 2(\mathbf{b_1} * \mathbf{b_2});$$
$$(\mathbf{a_1} + 2\mathbf{b_1}) \circ (\mathbf{a_2} + 2\mathbf{b_2}) = (\mathbf{a_1}\mathbf{a_2} * \mathbf{b_1}\mathbf{b_2}) + 2(\mathbf{a_1}\mathbf{b_2} * \mathbf{a_2}\mathbf{b_1} * \mathbf{b_1}\mathbf{b_2}).$$

Если $\mathbf{b_1} = \mathbf{a_2} = 0$, то из первого равенства следует, что

$$a_1 * 2b_2 = a_1 + 2b_2,$$

а из второго равенства

$$a_1 \circ 2b_2 = 2a_1b_2; \quad a_1 \circ 2 = 2a_1.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$a_1 + 2b_1 = a_1 * 2 \circ b_1 = a_1 * 2b_1.$$

Легко проверить, что в отношении операции сложения множество P_1 образует абелеву группу, т.е. поле Π_1 над множеством P_1 определено.

Предположим далее, что поля над множествами $P_0, P_1, ..., P_{k-1}$ определены. Обозначим их соответственно $\Pi_0, \Pi_1, ..., \Pi_{k-1}$. Исходя из этого предположения, определим поле Π_k над множеством $P_k (k \geq 2)$. Каждый элемент множества P_k единственным образом представляется в виде $a + 2^{2^{k-1}} \cdot b,$ где $a, b \in P_{k-1}$. Операцию сложения двух элементов определим равенством

$$(a_1 + 2^{2^{k-1}} b_1) * (a_2 + 2^{2^{k-1}} b_2) = (a_1 * a_2) + 2^{2^{k-1}} (b_1 * b_2).$$

При $b_1 = a_2 = 0$ имеем

$$a_1 * 2^{2^{k-1}} b_2 = a_1 + 2^{2^{k-1}} b_2. \tag{1}$$

Легко проверяется, что в отношении введенной операции P_k образует абелеву группу, причем каждый элемент является противоположным самому себе.

Если операцию умножения определить равенством

$$\begin{aligned}(a_1 + 2^{2^{k-1}} b_1) \circ (a_2 + 2^{2^{k-1}}) = (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \cdot 2^{2^{k-2}} \circ 2^{2^{k-3}} \circ ... \circ 2) + \\ + (a_1 \circ b_2 + a_2 \circ b_1 + b_1 \circ b_2) 2^{2^{k-1}},\end{aligned} \tag{2}$$

то легко убедиться в том, что в отношении введенных операций множество P_k является полем Π_k.

Поля над множествами $P_0, P_1, ...$ определены так, что поле Π_{k-1} является подполем поля Π_k. Таким образом, мы получили счетное множество вложенных друг в друга полей. Любая пара чисел n_1 и n_2 из множества Z_0 принадлежит некоторому множеству P_k, поэтому операция сложения и умножения определены над множеством Z_0. Поле над множеством Z_0 обозначим через Π.

Рассмотрим теоретико-функциональные полиномы над полем Π_k. Общий вид этих полиномов имеет вид

$$\sum_{i_j=0,2^{2^k}-1} a_{i1,i_2,i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_p^{i_p}, \tag{3}$$

где коэффициенты $a_{i1,i_2,\ldots,i_p} \in P_k$ и переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p \in P_k$.

В выражении (3) операции сложения и умножения рассматриваются в смысле операций поля Π_k (и в дальнейшем операции сложения и умножения будут применяться только в смысле операций поля Π_k). В частном случае, когда $k = 0$, полином (3) называется полиномом Жегалкина [2].

Любая функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, где переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p \in P_k$, единственным образом может быть представлена в виде полинома (3). А так как и каждый полином вида (3) определяет единственную функцию, то между множеством полиномов и множеством функций существует взаимно - однозначное соответствие. Поэтому каждый полином может рассматриваться как стандартное представление некоторой функции. Может быть предложен алгоритм, позволяющий переходить от других представлений функций, например от табличных и полиномиальных. Так как любому предикату над множеством P_k тоже соответствует единственный полином, то система $S = \{P_k, R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ однозначно представима m полиномами.

Рассмотрим случай, когда $2^{2^{k-1}} < n \le 2^{2^k}$ (n - число элементов системы). Пусть дана функция $y = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, где переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$ принимают значения из множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Определим функцию $y = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, где переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$ принимают значения из множества P_k следующим образом:

$$y = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_p) & \text{при} \quad x_j \in \{0;1;2;\ldots,n-1\}, \\ 0, & \text{в противном} \quad \text{случае.} \end{cases} \tag{4}$$

Функция $y = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ уже может быть представлена в виде полинома (3). Но используя условия (4), можно исключить все члены полинома, содержащие $x_j^{i_j}$, у которых $i_j \ge n$:

$$x_j^{i_j} = \alpha_{0i_j} + \alpha_{1i_j} x_j + \ldots + \alpha_{n-1,i_j} x_j^{n-1} \ . \qquad (5)$$

Следовательно, любая функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ единственным образом может быть представлена полиномом вида

$$\sum_{ij=1,n-1} a_{i1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \ . \qquad (6)$$

Два полинома вида (6) при всех наборах значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$ из $\{0,1,\ldots,n-1\}$ принимают равные значения тогда и только тогда, когда все коэффициенты полиномов с одинаковыми индексами равны друг другу. Над полиномами могут быть произведены операции сложения, умножения и суперпозиции, но при этом должно быть учтено соотношение (5).

Следовательно, любая система $S = (A; R_1, R_2, \ldots, R_m)$, где $A = \{0,1,\ldots,n-1\}$, единственным образом может быть представлена m полиномами вида (6). При этом легко указать алгоритм перехода от другого представления системы, например от табличного к полиномиальному и наоборот. Полиномиальное представление систем позволяет производить операции над различными системами применением алгоритмов, единых для всех систем и тождественное преобразование систем, а также разработать стандартные программы для исследования различных систем с применением ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. – М.: Мир, 1972. – 380 с.

2. Яблонский С.В. и др. Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966. – 154 с.

Поступила в редколлегию 13.11.2000