УДК 512.66

ПРОЦЕДУРА РАСШИРЕНИЯ ФОРМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

к.т.н. К.А. Метешкин
(представил д.т.н., проф. Е.И. Бобыр)

Исследуется возможность расширения формальных теорий для описания предметных областей одного уровня иерархии организационно-технической системы. Предъявляются требования к процедуре расширения формальных теорий.

Современный уровень развития информационных технологий характеризуется созданием интеллектуальных систем управления, которые разрабатываются для управления организационно - техническими системами (ОТС). Сложность процессов управления в таких системах обусловливается их многоуровневыми структурами, многообразием задач, решаемых элементами таких систем, а также множеством связей между ее элементами. Эти факты определяют специфику выбора научных основ для создания специального математического обеспечения (СМО) интеллектуальных систем управления.

На наш взгляд, научной основой для создания СМО могут служить теория категорий (приложение общей топологии и гомологической алгебры), методы которой все чаще используются при формализации сложных объектов и процессов управления.

Используя известные методы [1,2], предложим процедуру представления объектов категории формальными теориями.

Известно, что некоторую предметную область можно описать формальной теорией, которая может быть представлена в виде

$$\mathscr{M} = \left\langle \Sigma_M, A_M, L_M \right\rangle, \qquad (1)$$

где $\Sigma_M = \{ M_i \}$, $i = \overline{1,m}$ - сигнатура формальной теории, состоящая из m моделей M_i; A_M - аксиоматика, построенная на основе Σ_M; L_M - правило логического вывода теории, состоящее из соответствующих посылок и заключения (теоремы формальной теории).

Формализация объектов и процессов, протекающих в ОТС, связана с трудностями, которые обусловлены многообразием отношений между ее элементами. Исследования показывают [3], что формализуемую предметную область целесообразно представлять отдельными подтеориями, которые описывают наиболее важные стороны исследуемого процесса или явления.

Исследуем возможность объединения нескольких подтеорий в одну, расширенную формальную теорию (РФТ), которая может быть представлена объектом категории - более крупной теоретико - модельной конструкцией. Предположим, что некоторая предметная область $\mathcal{Y}$ представлена тремя подтеориями $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$, которые состоят их соответствующих сигнатур $\Sigma_M^1, \Sigma_M^2, \Sigma_M^3$, аксиоматик A_M^1, A_M^2, A_M^3 и правил логического вывода L_M^1, L_M^2, L_M^3. Зададим условия объединения сигнатур формальных теорий $\Sigma_{O_j} = \Sigma_M^1 \bigcup \Sigma_M^2 \bigcup \Sigma_M^3$, где j - рассматриваемый уровень иерархии структуры O. Будем полагать, что сигнатуры в своем составе содержат по x, y и z моделей, соответственно. Тогда:

$$\left\{M_1^1, M_2^1, \ldots, M_x^1\right\} = \Sigma_M^1;\ \left\{M_1^2, M_2^2, \ldots, M_y^2\right\} = \Sigma_M^2;\ \left\{M_1^3, M_2^3, \ldots, M_z^3\right\} = \Sigma_M^3.$$

Пересечение сигнатур формальных теорий проиллюстрировано на рис.1.

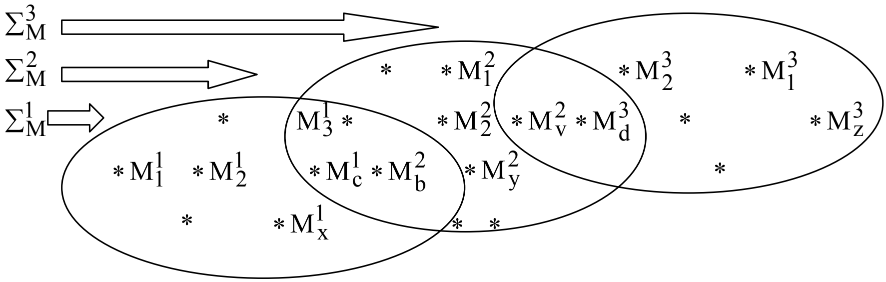

Рис. 1. Иллюстрация пересечения сигнатур формальных теорий $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$

Из рис.1 видно, что пересечения сигнатур $\Sigma_M^1 \bigcap \Sigma_M^2 = \left\{M_3^1, M_c^1, M_b^2\right\}$, $\Sigma_M^2 \bigcap \Sigma_M^3 = \left\{M_v^2, M_d^3\right\}$ образуют некоторые подмножества моделей. Для объединения подтеорий $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ в одну $\mathcal{T}_{1,2,3}$ необходимо исследовать природу моделей образующих пересечение соответствующих сигнатур.

Из факта пересечения сигнатур формальных теорий следует, что при объединении аксиоматик $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ и получении аксиоматики для $\mathcal{T}_{1,2,3}$ возникает семантическая противоречивость, которую необходимо устранить специальными процедурами. Иными словами, при составлении аксиоматики возникает избыточность за счет подобных моделей, что может привести к противоречивости в РФТ в целом.

Предварительно заметим, что модели M_{O_i} формально представляются набором базовых множеств и отношениями между ними, что соответствует записи $\mathbf{M}_{\mathbf{O_i}}^{\hbar} = \left\{\mathbf{B_v}, \mathbf{W_q}\right\}$, где $\hbar$ - ординал сигнатуры теории, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{q}$ – индексы, соответствующие текущим номерам базового множества элементов модели ($\mathbf{B}$) и множества отношений ($\mathbf{W}$) между ними.

Сущность предлагаемой процедуры состоит в следующем. Модели, которые образуют пересечение исследуемых сигнатур, проверяются на подобие по следующим правилам. Если элементы базовых множеств моделей тождественны, а отношения между ними толерантны, то принимается решение, в объединенную сигнатуру $\Sigma_{\mathbf{O_j}}$ ввести единый символ, обобщающий символы эквивалентных моделей, например, $\left(\mathbf{M_v^2} \sim \mathbf{M_d^3}\right) = \mathbf{M_q^{2,3}}$. В противном случае, модели образующие пересечение сигнатур, подвергаются декомпозиции, и элементы их базовых множеств проверяются на тождественность, а множество отношений на толерантность.

Если хотя бы одна пара элементов сравниваемых базовых множеств модели не тождественны или отношения между ними не толерантны, то принимается решение строить расширенную модель.

На основе теорем об элементарных расширениях моделей и рекомендаций [4] расширенную модель можно представить совокупностью подмоделей, например, $\left\{\mathbf{M_3^1}, \mathbf{M_c^1}, \mathbf{M_b^2}\right\} \in \mathbf{M_u^{1,1,2}}$.

В результате парного сравнения элементов моделей и отношений между ними определяется избыточность элементов базового множества $\mathbf{M_u^{1,1,2}}$, а также отношений между ними. При необходимости вводятся новые элементы и задаются соответствующие отношения. Для отличия расширенных моделей от других, у которых изменен символ ввиду их подобия, впереди символа расширенной модели будем ставить знак расширения, например, ® $\mathbf{M_u^{1,1,2}}$. Учитывая предложенные правила, сигнатуру РФТ $\mathscr{M}_{1,2,3}$ можно записать в виде

$$\Sigma_{\mathbf{O_j}} = \left\langle \mathbf{M_1^1}, \mathbf{M_2^1}, \ldots, ®\,\mathbf{M_u^{1,1,2}}, \ldots, \mathbf{M_x^1}, \ldots, \mathbf{M_1^2}, \mathbf{M_2^2}, \ldots, \mathbf{M_y^2}, \ldots, \mathbf{M_1^3}, \mathbf{M_2^3}, \ldots, \mathbf{M_q^{2,3}}, \ldots, \mathbf{M_z^3} \right\rangle. \quad (2)$$

Следующим этапом построения РФТ является разработка ее аксиоматики $\mathbf{A_{O_j}}$ на сигнатуре $\Sigma_{\mathbf{O_j}}$. Правила построения аксиоматики могут базироваться на одной из известных формальных систем (исчислений высказываний, предикатов, модальных логик и др.). В случае, если

$$\Sigma_{\mathbf{M}}^{\mathbf{1}} \bigcap \Sigma_{\mathbf{M}}^{\mathbf{2}} \bigcap, \ldots, \bigcap \Sigma_{\mathbf{M}}^{\mathbf{V}} = \varnothing, \quad (3)$$

то справедливо соотношение $\bigcup\limits_{\mathbf{g=1,\mu=1}}^{\mathbf{V,Q}} \mathbf{A_{g,\mu}} = \mathbf{A_{O_j}}$, где $\mathbf{V}$ - количество систем аксиом, а $\mathbf{Q}$ - количество аксиом в каждой их систем. Основным требованием к разрабатываемой аксиоматике является ее непротиворечивость.

Для разработки правил логического вывода РФТ объединенную аксиоматику представляют в виде конечного множества секвенций и формул **Ф**, последняя из которых **Т** является следствием предыдущих. В формальном виде правило логического вывода РФТ с объединенной аксиоматикой можно записать $\dfrac{\mathbf{\Phi_1,..\Phi_r}}{\mathbf{T}}$, где $\mathbf{\Phi_1,...,\Phi_r}$ называют посылками, **r** - количество формул в правиле, а **Т** - следствием или заключением. В случае, если справедливо соотношение (3), то правило логического вывода разрабатывается для каждой формальной теории в отдельности.

В обобщенном виде формальную теорию, описывающую множество предметных областей ОТС **j**-го уровня иерархии ее структуры **O** можно представить соотношением

$$\mathscr{T}_{1,2,\dots,N} = \left\langle \Sigma_{O_j}, A_{O_j}, L_{O_j} \right\rangle. \qquad (4)$$

Кратко сформулируем требования к расширенной формальной теории.

- Основным требованием к РФТ является ее непротиворечивость.
- Сигнатура РФТ должна быть не избыточна, т.е. ее алфавит не должен содержать одинаковых символов.
- При построении аксиоматики РФТ необходимо использовать одну конкретную формальную систему.
- Расширенная формальная теория должна обеспечивать максимально возможную полноту относительно содержательной теории.

Таким образом, предложенная процедура позволяет укрупнить формальные теории с целью использования их в качестве объектов категории при формальном описании процессов управления в ОТС на языке метаматематики (языке теории категорий).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрян Р.А., Мирзахонян Э.А. Общая топология. – М: Высш. школа, 1979. – 336 с.
2. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. – М.: Наука, 1995. – 416 с.
3. Метешкин К.А. Теоретические основы построения интеллектуальных систем управления учебным процессом в вузе. – Харьков: Экограф, 2000. – 278 с.
4. Робинсон А. Введение в теорию моделей и математику алгебры. – М.: Наука, 1967. – 374 с.

Поступила в редколлегию 28.10.2000