УДК 621.373

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В.В. Копытов, К.С. Костенко
(представил д.т.н., проф. И.И. Сныткин)

Определена структура энергетического спектра стохастических колебаний, возникающих в нелинейной динамической системе (НДС) в результате последовательности бифуркаций удвоения периода.

Поведение нелинейной динамической системы в закритической области при $\lambda>\lambda_\infty$ не может быть описано одной математической моделью, так как при изменении управляющего параметра могут возникать как стохастические, так и сложно периодические колебания по различным сценариям [1]. Структура стохастических колебаний в этом случае будет качественно различной, поэтому единое математическое описание стохастических колебаний в данной области отсутствует. При изменении управляющего параметра от λ_∞, где возникают стохастические колебания, до Λ_5, когда колебания станут сложно периодическими, структура колебаний испытывает ряд обратных бифуркаций. В результате этого происходит слияние хаотических полос в единый аттрактор. Структура энергетического спектра стохастических колебаний претерпевающих ряд обратных бифуркаций, как показали экспериментальные исследования, подчиняется аналогичным универсальным закономерностям, что и при переходе к хаосу в результате бифуркаций удвоения периода [1]. Определим структуру стохастических колебаний в данной области.

Вид энергетического спектра стохастических колебаний при бифуркационных значениях вблизи λ_∞, где происходит слияние полос хаотического движения, определяется как периодическими переходами между слоями, так и хаотическими перемещениями внутри каждого слоя. Поэтому $\mathbf{X_n}$ можно представить в виде [2]:

$$\mathbf{X_n} = \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{A_j} \exp(\mathbf{i}\omega_\mathbf{j}\mathbf{n}) + \mathbf{r(n)}, \tag{1}$$

где $\mathbf{r(n)}$ - шумовая составляющая. Спектральная плотность для процесса $\mathbf{X_n}$ при некотором значении параметра λ равна

$$\mathbf{S}(\omega,\lambda) = \sum_{\mathbf{j}} \left|\mathbf{A_j}(\lambda)\right|^2 \delta(\omega-\omega_\mathbf{j}) + \left|\mathbf{n}(\omega,\lambda)\right|^2, \tag{2}$$

т.е. представляет собой суперпозицию дискретных линий и шумового фона, интенсивность которого равна

$$\mathbf{N(\lambda) = \int_0^{2\pi} \left| n(\omega,\lambda) \right|^2 d\omega = r(0,\lambda),} \tag{3}$$

где $\mathbf{r(\kappa,\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m+1}^{N} n(m+\kappa,\lambda)\, n(m,\lambda)}$ - корреляционная функция шума. Поскольку шум обусловлен случайными блужданиями внутри каждого слоя, то очевидно [3], что $\mathbf{r(0,\lambda) = W^2(\lambda)}$, где $\mathbf{W(\lambda)}$ – средняя ширина слоя при данном значении параметра λ.

В соответствие с законом подобия (2) при переходе через бифуркационное значение параметра половина слоев уменьшается в α раз, а другая половина - в α^2 раз. Поэтому среднеквадратичная ширина одного слоя при $\lambda = \Lambda^*_{m+1}$, где Λ^*_{m+1} - значение параметра λ, соответствующее **(m+1)** - й обратной бифуркации удвоения, равна

$$\mathbf{W_{m+1} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha^2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)} \cdot W_m = \frac{1}{\beta} \cdot W_m}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\beta = \sqrt{2}\alpha^2 / \sqrt{1+\alpha^2}}$.

Из (3) и (4) следует, что

$$\mathbf{N(\Lambda^*_{n+1}) = N(\Lambda^*_n)\beta^{-2}} . \tag{5}$$

Так как для больших **n** в соответствии с [2]:

$$\mathbf{\Lambda^*_n - \lambda_\infty \approx \delta^{-n}} , \tag{6}$$

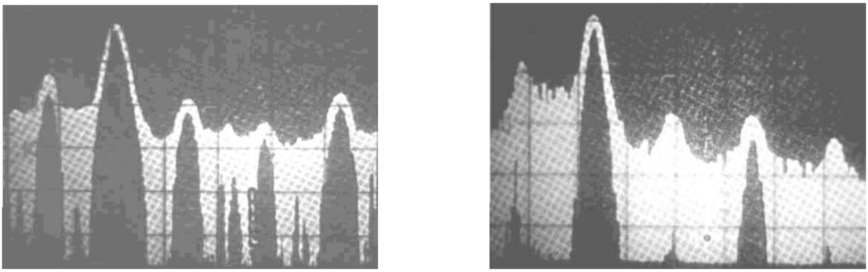
то из (5) следует, что

$$\mathbf{N(\lambda) \approx (\lambda - \lambda_\infty)^g} , \tag{7}$$

где $\mathbf{g = 2\ln\beta / \ln\delta}$.

Таким образом, после перехода к хаосу, в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, энергетический спектр стохастических колебаний состоит из узких линий, обусловленных сменой слоев и шумового фона, вызванного случайными блужданиями вдоль каждого слоя. Причем при удалении от точки перехода интенсивность шумового фона растет в соответствие с выражением (7). Форма сплошного энергетического спектра подчиняется аналогичным закономерностям, описывающим форму дискретного спектра.

Приведенные на рис. 1 а, б экспериментально определенные энергетические спектры колебаний нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии с разной частотой [3], играющей в данном случае роль бифуркационного параметра, подтверждают полученные выводы о структуре энергетического спектра стохастических колебаний в закритической области. По мере дальнейшего изменения управляющего параметра происходит смена стохастического режима на сложно периодический с периодом не кратным степени двойки и для его описания необходимы другие подходы.



а) б)

Рис.1. Энергетический спектр стохастических колебаний нелинейного колебательного контура

Таким образом, определена структура энергетического спектра стохастических колебаний, возникающих в НДС в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, и установлено, что она определяется постоянными α, δ и значением управляющего параметра λ. Постоянные α и δ определяются размерностью неавтономной нелинейной динамической системы и зависят от ее физической реализации, а изменением частоты или амплитуды внешнего воздействия можно легко изменять как ширину энергетического спектра стохастических колебаний, так и его структуру. Указанное обстоятельство позволяет создавать генераторы стохастических колебаний с заданным энергетическим спектром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

2. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир, 1988. – 240 с.

3. Копытов В.В., Чайка Ю.Д. Экспериментальное исследование стохастических колебаний связанных нелинейных осцилляторов // Тематический НТС №1. – Ставрополь, СВВИУС. – 1983. – С. 3 - 15.

Поступила в редколлегию 10.01.2001