

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИ УСЛОВИИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДСТВ КОНФЛИКТУЮЩИХ СТОРОН

к.т.н. В.Б. Кононов, Д.И. Евстрат, А.В. Тристан, О.А. Боровской
(представил проф., д.т.н. Б.Ф.Самойленко)

В статье рассматриваются результаты решения дифференциальных уравнений, описывающие конфликтную ситуацию при условии того, что конфликтующие стороны имеют однородные средства.

Рассматривается конфликтная ситуация при условии, что конфликтующие стороны **A** и **B** имеют однородные средства. Для этого случая уравнения Ланчестера [1], описывающие эту ситуацию, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -by(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ax(t). \end{cases} \quad (1)$$

Выполняя преобразования (1), получаем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -b \frac{dy(t)}{dt} = abx(t); \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a \frac{dx(t)}{dt} = aby(t). \end{cases} \quad (2)$$

Определим решение первого из уравнений системы (2). Составим характеристическое уравнение $p^2 - ab = 0$, решения которого имеют вид $p_1 = \sqrt{ab}$ и $p_2 = -\sqrt{ab}$. Следовательно, общее решение линейного дифференциального уравнения $x_{\text{общ}}(t) = c_1 e^{\sqrt{ab}t} + c_2 e^{-\sqrt{ab}t}$.

Для определения коэффициентов c_1 и c_2 воспользуемся начальными данными $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$, а также соотношением

$$\frac{dx(0)}{dt} = -by(0) = -by_0.$$

Тогда $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{x}_0$;

$$\left. \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left(\sqrt{ab} c_1 e^{\sqrt{abt}} - \sqrt{ab} c_2 e^{-\sqrt{abt}} \right) \Big|_{t=0} = \sqrt{ab} c_1 - \sqrt{ab} c_2 = -by_0.$$

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0; \\ c_1 \sqrt{ab} - c_2 \sqrt{ab} = y_0, \end{cases} \quad (3)$$

находим коэффициенты c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{by_0}{\sqrt{ad}} \right) = \frac{1}{2} \left(x_0 - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \right); \\ c_2 &= \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{by_0}{\sqrt{ad}} \right) = \frac{1}{2} \left(x_0 + y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, решение первого из уравнений системы (4), описывающей конфликтную ситуацию между двумя однородными средствами конфликтующих сторон, имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left(x_0 - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{\sqrt{abt}} + \frac{1}{2} \left(x_0 + y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{-\sqrt{abt}} = \\ &= x_0 \frac{e^{\sqrt{abt}} + e^{-\sqrt{abt}}}{2} - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{abt}} - e^{-\sqrt{abt}}}{2} = \\ &= x_0 \operatorname{ch} \sqrt{abt} - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{abt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Проводя аналогичные преобразования, найдём решение второго из уравнений системы (2):

$$y(t) = y_0 \operatorname{ch} \sqrt{abt} - x_0 \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{abt}. \quad (6)$$

С целью анализа соотношений (4) и (5) перейдём от абсолютных единиц, характеризующих численности конфликтующих сторон, к относительным единицам, т.е. к отношению числа сохранившихся средств конфликтующих сторон в данный момент времени к числу средств в начале конфликтной ситуации [1].

Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{X}(t) = \frac{\mathbf{x}(t)}{x_0}; \quad \mathbf{Y}(t) = \frac{\mathbf{y}(t)}{y_0}; \quad \theta = \frac{x_0}{y_0}; \quad \eta = \frac{a}{b},$$

где $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ - относительные численности группировок сторон;

θ - соотношение сил в начале конфликтной ситуации;
 η - соотношение эффективных скорострельностей сторон.

Тогда уравнения, отражающие характер изменения во времени относительной численности сторон в конфликтной ситуации, имеют вид:

$$X(t) = ch\sqrt{abt} - \frac{1}{\theta\sqrt{\eta}} sh\sqrt{abt}; \quad (7)$$

$$Y(t) = ch\sqrt{abt} - \theta\sqrt{\eta} sh\sqrt{abt}.$$

Введём параметр

$$\mu = \theta\sqrt{\eta} \quad (8)$$

и назовём его коэффициентом превосходства одной стороны над другой. Обоснование такой трактовки параметра μ следует из соотношений (7), которые могут быть с учётом (8) представлены в виде:

$$X(t) = ch\sqrt{abt} - \frac{1}{\mu} sh\sqrt{abt}; \quad (9)$$

$$Y(t) = ch\sqrt{abt} - \mu sh\sqrt{abt}.$$

Коэффициент превосходства μ зависит от соотношения сил в начале конфликтной ситуации и от соотношения эффективных скорострельностей, причём в большей степени он зависит от соотношения сил в начале конфликтной ситуации θ , так как величина η входит в (8) под знаком квадратного корня.

Полученные соотношения хорошо согласуются с общеизвестным утверждением о первостепенном значении концентрации сил и средств на направлении главного удара. С помощью зависимостей (8) и (9) представляется возможным выполнить количественную оценку влияния концентрации сил и проанализировать это влияние в ходе конфликтной ситуации. Для этого определим максимальную продолжительность конфликтной ситуации, т.е. такую величину t , при которой одна из конфликтующих сторон будет полностью уничтожена. Пусть $\mu > 1$. Таким образом, побеждающей стороной будет группировка А. Введём понятие приведенного времени \bar{t} . Для этого обозначим:

$$\bar{t} = \sqrt{abt}; \quad X(\bar{t}) = \frac{X(t)}{\sqrt{ab}}; \quad Y(\bar{t}) = \frac{Y(t)}{\sqrt{ab}}. \quad (10)$$

С учётом (10) соотношения (9) примут вид:

$$X(\bar{t}) = ch\bar{t} - \frac{1}{\mu} sh\bar{t}; \quad (11)$$

$$Y(\bar{t}) = ch\bar{t} - \mu sh\bar{t}.$$

Поскольку при ведении конфликтной ситуации относительные численности конфликтующих группировок убывают, а тем самым $Y'(\bar{t}) = \text{sh} \bar{t} - \mu \cdot \text{ch} \bar{t} < 0$ в силу того, что $\text{th} \bar{t} < 1 < \mu$, функция $Y(\bar{t})$ монотонно убывает. Так как $Y(\bar{t}) \geq 0$, то её наименьшее значение равно

$$Y(\bar{t}_k) = \text{ch} \bar{t}_k - \mu \cdot \text{sh} \bar{t}_k = 0.$$

Откуда

$$\text{th} \bar{t}_k = \frac{1}{\mu}. \quad (12)$$

Решим полученное уравнение $\frac{e^{\bar{t}_k} - e^{-\bar{t}_k}}{e^{\bar{t}_k} + e^{-\bar{t}_k}} = \frac{1}{\mu}$ или

$$\bar{t}_k = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} \text{ при } \mu \neq 1, \quad (12)$$

что и является моментом полного истощения боевых средств группировки B в “приведенных” единицах времени \bar{t} . Учитывая (10), получим момент окончания конфликтной ситуации на “истощение”

$$\bar{t}_k = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}. \quad (13)$$

При этом количество сохранившихся средств стороны A равно

$$\begin{aligned} x(\bar{t}_k) &= x_0 \left(\text{ch} \bar{t}_k - \frac{1}{\mu} \text{sh} \bar{t}_k \right) = x_0 \left(\frac{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}} + e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}}}{2} - \frac{1}{\mu} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}} - e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}}}{2} \right) = \\ &= x_0 \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} + \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} + \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \right) \right] = x_0 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - 1}} - \frac{\mu}{\mu \sqrt{\mu^2 - 1}} \right) = \\ &= x_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2}}. \end{aligned}$$

Если $\mu < 1$, то побеждающей стороной будет группировка B . При этом монотонно убывает функция $X(\bar{t})$ и её наименьшее значение в момент времени \bar{t}'_k будет равно $X(\bar{t}'_k) = \text{ch} \bar{t}'_k - \frac{1}{\mu} \text{sh} \bar{t}'_k = 0$, а значит

$$\operatorname{th} \bar{t}_k' = \mu = \frac{e^{\bar{t}_k} - e^{-\bar{t}_k}}{e^{\bar{t}_k} + e^{-\bar{t}_k}}.$$

Момент окончания конфликтной ситуации определится по формуле

$$\bar{t}_k' = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}, \quad (14)$$

что и является моментом полного истощения средств группировки **A** в приведенных единицах времени \bar{t} . Момент окончания конфликтной ситуации на “истощение” будет равен

$$t_k' = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}, \quad (15)$$

а количество сохранившихся боевых средств стороны **B** равно

$$y(\bar{t}_k) = y_0 \sqrt{1-\mu^2}. \quad (16)$$

В частном случае, когда обе группировки равносильны, т.е. $\mu = 1$, уравнения (11) принимают вид

$$X(\bar{t}) = Y(\bar{t}) = e^{-\bar{t}} \quad \text{при } \mu = 1. \quad (17)$$

Таким образом, в случае боя равносильных группировок каждая из них уменьшается в ходе конфликтной операции по показательному закону. Если одна из группировок сильнее другой ($\mu \neq 1$), то более сильная сторона с некоторого момента перестанет нести существенные потери, тогда как слабая сторона быстро убывает в своей численности, доходя до полного уничтожения.

Приведенные соотношения хотя и не полностью отражают реальную картину конфликтной ситуации, но зато убедительно иллюстрируют необходимость максимальной концентрации сил на направлении главного удара для скорейшего достижения победы над противником с обеспечением минимальных потерь в своих силах и средствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lanchester F. Aircraft in warfare. – London, 1916. – 120 p.
2. Мороз Ф.В., Кембелл Д.Е. Методы исследования операций. – М.: Сов. радио, 1965. – 286 с.

Поступила в редколлегию 15.01.2001