УДК 623. 021: 005

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИ УСЛОВИИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДСТВ КОНФЛИКТУЮЩИХ СТОРОН

к.т.н. В.Б. Кононов, Д.И. Евстрат, А.В. Тристан, О.А. Боровской
(представил проф., д.т.н. Б.Ф.Самойленко)

В статье рассматриваются результаты решения дифференциальных уравнений, описывающие конфликтную ситуацию при условии того, что конфликтующие стороны имеют однородные средства.

Рассматривается конфликтная ситуация при условии, что конфликтующие стороны **A** и **B** имеют однородные средства. Для этого случая уравнения Ланчестера [1], описывающие эту ситуацию, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -by(t); \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -ax(t). \end{cases} \tag{1}$$

Выполняя преобразования (1), получаем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt} = -b\dfrac{dy(t)}{dt} = abx(t); \\ \dfrac{d^2y(t)}{dt} = -a\dfrac{dx(t)}{dt} = aby(t). \end{cases} \tag{2}$$

Определим решение первого из уравнений системы (2). Составим характеристическое уравнение $p^2 - ab = 0$, решения которого имеют вид $p_1 = \sqrt{ab}$ и $p_2 = -\sqrt{ab}$. Следовательно, общее решение линейного дифференциального уравнения $x_{общ}(t) = c_1 e^{\sqrt{ab}t} + c_2 e^{-\sqrt{ab}t}$.

Для определения коэффициентов c_1 и c_2 воспользуемся начальными данными $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$, а также соотношением

$$\frac{dx(0)}{dt} = -by(0) = -by_0.$$

Тогда $$x(0)=c_1+c_2=x_0;$$

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\left(\sqrt{ab}\,c_1 e^{\sqrt{ab}t}-\sqrt{ab}\,c_2 e^{-\sqrt{ab}t}\right)\right|_{t=0}=\sqrt{ab}\,c_1-\sqrt{ab}\,c_2=-by_0.$$

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} c_1+c_2=x_0; \\ c_1\sqrt{ab}-c_2\sqrt{ab}=y_0, \end{cases} \qquad (3)$$

находим коэффициенты c_1 и c_2:

$$c_1=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{by_0}{\sqrt{ad}}\right)=\frac{1}{2}\left(x_0-y_0\sqrt{\frac{b}{a}}\right);$$
$$c_2=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{by_0}{\sqrt{ad}}\right)=\frac{1}{2}\left(x_0+y_0\sqrt{\frac{b}{a}}\right). \qquad (4)$$

Таким образом, решение первого из уравнений системы (4), описывающей конфликтную ситуацию между двумя однородными средствами конфликтующих сторон, имеет вид

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(x_0-y_0\sqrt{\frac{b}{a}}\right)e^{\sqrt{ab}t}+\frac{1}{2}\left(x_0+y_0\sqrt{\frac{b}{a}}\right)e^{-\sqrt{ab}t}=$$
$$=x_0\,\frac{e^{\sqrt{ab}t}+e^{-\sqrt{ab}t}}{2}-y_0\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{e^{\sqrt{ab}t}-e^{-\sqrt{ab}t}}{2}= \qquad (5)$$
$$=x_0\,\mathrm{ch}\sqrt{ab}t-y_0\sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{sh}\sqrt{ab}t.$$

Проводя аналогичные преобразования, найдём решение второго из уравнений системы (2):

$$y(t)=y_0\,\mathrm{ch}\sqrt{ab}t-x_0\sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathrm{sh}\sqrt{ab}t. \qquad (6)$$

С целью анализа соотношений (4) и (5) перейдём от абсолютных единиц, характеризующих численности конфликтующих сторон, к относительным единицам, т.е. к отношению числа сохранившихся средств конфликтующих сторон в данный момент времени к числу средств в начале конфликтной ситуации [1].

Введём следующие обозначения:

$$X(t)=\frac{x(t)}{x_0};\;\; Y(t)=\frac{y(t)}{y_0};\;\; \theta=\frac{x_0}{y_0};\;\; \eta=\frac{a}{b},$$

где $X(t)$, $Y(t)$ - относительные численности группировок сторон;

θ - соотношение сил в начале конфликтной ситуации;

η - соотношение эффективных скорострельностей сторон.

Тогда уравнения, отражающие характер изменения во времени относительной численности сторон в конфликтной ситуации, имеют вид:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - \frac{1}{\theta\sqrt{\eta}}\,\mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t; \\ Y(t) &= \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - \theta\sqrt{\eta}\;\mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t. \end{aligned} \tag{7}$$

Введём параметр

$$\mu = \theta\sqrt{\eta} \tag{8}$$

и назовём его коэффициентом превосходства одной стороны над другой. Обоснование такой трактовки параметра μ следует из соотношений (7), которые могут быть с учётом (8) представлены в виде:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - \frac{1}{\mu}\mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t; \\ Y(t) &= \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - \mu\,\mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t. \end{aligned} \tag{9}$$

Коэффициент превосходства μ зависит от соотношения сил в начале конфликтной ситуации и от соотношения эффективных скорострельностей, причём в большей степени он зависит от соотношения сил в начале конфликтной ситуации θ, так как величина η входит в (8) под знаком квадратного корня.

Полученные соотношения хорошо согласуются с общеизвестным утверждением о первостепенном значении концентрации сил и средств на направлении главного удара. С помощью зависимостей (8) и (9) представляется возможным выполнить количественную оценку влияния концентрации сил и проанализировать это влияние в ходе конфликтной ситуации. Для этого определим максимальную продолжительность конфликтной ситуации, т.е. такую величину t, при которой одна из конфликтующих сторон будет полностью уничтожена. Пусть $\mu > 1$. Таким образом, побеждающей стороной будет группировка A. Введём понятие приведенного времени $\bar{t}$. Для этого обозначим:

$$\bar{t} = \sqrt{ab}\,t\,; \quad X(\bar{t}) = \frac{X(t)}{\sqrt{ab}}\,; \quad Y(\bar{t}) = \frac{Y(t)}{\sqrt{ab}}\,. \tag{10}$$

С учётом (10) соотношения (9) примут вид:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{ch}\,\bar{t} - \frac{1}{\mu}\mathrm{sh}\,\bar{t}; \\ Y(t) &= \mathrm{ch}\,\bar{t} - \mu\,\mathrm{sh}\,\bar{t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку при ведении конфликтной ситуации относительные численности конфликтующих группировок убывают, а тем самым $\mathbf{Y}'(\bar{\mathbf{t}}) = \mathbf{sh}\bar{\mathbf{t}} - \mu \cdot \mathbf{ch}\,\bar{\mathbf{t}} < \mathbf{0}$ в силу того, что $\mathbf{th}\,\bar{\mathbf{t}} < \mathbf{1} < \mu$, функция $\mathbf{Y}(\bar{\mathbf{t}})$ монотонно убывает. Так как $\mathbf{Y}(\bar{\mathbf{t}}) \geq \mathbf{0}$, то её наименьшее значение равно

$$\mathbf{Y}\left(\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}\right) = \mathbf{ch}\,\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}} - \mu \cdot \mathbf{sh}\,\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}} = \mathbf{0}.$$

Откуда

$$\mathbf{th}\,\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{1}}{\mu}. \tag{12}$$

Решим полученное уравнение $\dfrac{\mathbf{e}^{\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}} - \mathbf{e}^{-\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}}}{\mathbf{e}^{\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}} + \mathbf{e}^{-\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mu}$ или

$$\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ln\frac{\mu+\mathbf{1}}{\mu-\mathbf{1}} \text{ при } \mu \neq \mathbf{1}, \tag{12}$$

что и является моментом полного истощения боевых средств группировки $\mathbf{B}$ в “приведенных” единицах времени $\bar{\mathbf{t}}$. Учитывая (10), получим момент окончания конфликтной ситуации на “истощение”

$$\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{ab}}}\ln\frac{\mu+\mathbf{1}}{\mu-\mathbf{1}}. \tag{13}$$

При этом количество сохранившихся средств стороны $\mathbf{A}$ равно

$$\mathbf{x}\left(\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}\right) = \mathbf{x}_0\left(\mathbf{ch}\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}} - \frac{\mathbf{1}}{\mu}\mathbf{sh}\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}\right) = \mathbf{x}_0\left(\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}} + \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mu}\,\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}} - \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}}{\mathbf{2}}\right) =$$

$$= \mathbf{x}_0\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\sqrt{\frac{\mu+\mathbf{1}}{\mu-\mathbf{1}}} + \sqrt{\frac{\mu-\mathbf{1}}{\mu+\mathbf{1}}}\right) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\mu}\left(\sqrt{\frac{\mu+\mathbf{1}}{\mu-\mathbf{1}}} + \sqrt{\frac{\mu-\mathbf{1}}{\mu+\mathbf{1}}}\right)\right] = \mathbf{x}_0\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-\mathbf{1}}} - \frac{\mu}{\mu\sqrt{\mu^2-\mathbf{1}}}\right) =$$

$$= \mathbf{x}_0\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mu^2}}.$$

Если $\mu < \mathbf{1}$, то побеждающей стороной будет группировка $\mathbf{B}$. При этом монотонно убывает функция $\mathbf{X}(\bar{\mathbf{t}})$ и её наименьшее значение в момент времени $\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}'$ будет равно $\mathbf{X}\left(\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}'\right) = \mathbf{ch}\,\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}' - \dfrac{\mathbf{1}}{\mu}\mathbf{sh}\,\overline{\mathbf{t}_\mathbf{k}}' = \mathbf{0}$, а значит

$$\operatorname{th}\overline{t_k}' = \mu = \frac{e^{\overline{t_k}} - e^{-\overline{t_k}}}{e^{\overline{t_k}} + e^{-\overline{t_k}}}.$$

Момент окончания конфликтной ситуации определится по формуле

$$\overline{t_k}' = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}, \qquad (14)$$

что и является моментом полного истощения средств группировки **A** в приведенных единицах времени $\bar{t}$. Момент окончания конфликтной ситуации на "истощение" будет равен

$$t'_k = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}, \qquad (15)$$

а количество сохранившихся боевых средств стороны **B** равно

$$y\left(\overline{t_k}\right) = y_0\sqrt{1-\mu^2}. \qquad (16)$$

В частном случае, когда обе группировки равносильны, т.е. $\mu = 1$, уравнения (11) принимают вид

$$X\left(\bar{t}\right) = Y\left(\bar{t}\right) = e^{-\bar{t}} \quad \text{при } \mu = 1. \qquad (17)$$

Таким образом, в случае боя равносильных группировок каждая из них уменьшается в ходе конфликтной операции по показательному закону. Если одна из группировок сильнее другой $(\mu \neq 1)$, то более сильная сторона с некоторого момента перестанет нести существенные потери, тогда как слабая сторона быстро убывает в своей численности, доходя до полного уничтожения.

Приведенные соотношения хотя и не полностью отражают реальную картину конфликтной ситуации, но зато убедительно иллюстрируют необходимость максимальной концентрации сил на направлении главного удара для скорейшего достижения победы над противником с обеспечением минимальных потерь в своих силах и средствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lanchester F. Aireraft in warfare. – London, 1916. – 120 p.
2. Мороз Ф.В., Кембелл Д.Е. Методы исследования операций. – М.: Сов. радио, 1965. – 286 с.

Поступила в редколлегию 15.01.2001