УДК 623. 021: 005

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ СРЕДСТВ КОНФЛИКТУЮЩИХ ГРУППИРОВОК

к.т.н. В.Б. Кононов, Д.И. Евстрат, А.В. Тристан, И.Ф. Бабий
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

Рассматриваются результаты решения системы дифференциальных уравнений, описывающих конфликтную ситуацию при условии, что конфликтующие стороны имеют однородные средства. Приводятся соотношения для оценки изменения численности средств конфликтующих группировок.

Рассматривается конфликтная ситуация при условии, что конфликтующие стороны **A** и **B** имеют однородные средства, которая описывается уравнением Динера [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{b}{x_0} y(t) \cdot x(t); \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{a}{y_0} x(t) \cdot y(t) \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0, \tag{1a}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - математические ожидания количества боевых средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени **t**; **a** и **b** - эффективные скорострельности группировок **A** и **B.**

Разделим второе уравнение на первое. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax_0}{by_0} = \eta \cdot \theta,$$

где $\theta = \dfrac{x_0}{y_0}$ - соотношение сил в начале конфликтной ситуации, а $\eta = \dfrac{a}{b}$ - соотношение эффективных скорострельностей сторон. Следовательно,

$$y = \eta\theta x + c. \tag{2}$$

Постоянную **c** найдём, используя начальные условия (1а):

$$y_0 = \eta\theta x_0 + c, \quad c = y_0 - \eta\theta x_0. \tag{3}$$

В результате получим $y = \eta\theta x + y_0 - \eta\theta x_0$. Подставим значение **y** в первое уравнение динамики конфликтной ситуации:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{b}{x_0} x(\eta\theta x + c)$$

или $$\frac{dx}{x(\eta\theta x + c)} = -\frac{b}{x_0} dt; \quad \int \frac{dx}{x(\eta\theta x + c)} = -\frac{b}{x_0} \int dt.$$

Откуда $$\frac{1}{c} \ln \left| x / (x + c / \eta\theta) \right| = -\frac{b}{x_0} t + D,$$

так как $$D = \frac{1}{c} \ln \frac{x_0}{x_0 + \frac{c}{\eta\theta}} = \frac{1}{c} \ln \frac{\eta\theta x_0}{y_0} = \frac{1}{c} \ln \eta\theta^2,$$ то:

$$\frac{1}{c} \ln \left| x / (x + c / \eta\theta) \right| = -\frac{b}{x_0} t + \frac{1}{c} \ln \eta\theta^2;$$

$$\ln \left| x / (x + c / \eta\theta) \right| = -\frac{bc}{x_0} t + \ln \eta\theta^2;$$

$$\frac{x}{x + \frac{c}{\eta\theta}} = \exp\left(-\frac{bc}{x_0} t\right) \cdot \eta\theta^2;$$

$$x = \frac{c\theta}{\exp\left(-\frac{bc}{x_0} t\right) - \eta\theta^2} = \frac{\theta(y_0 - \eta\theta) \cdot x_0}{\exp\left(-\frac{bc}{x_0} t\right) - \eta\theta^2} =$$

$$= \frac{x_0 (1 - \eta\theta^2)}{\exp\left(-\frac{bc}{x_0} t\right) - \eta\theta^2} = \frac{x_0 (1 - \mu^2)}{\exp\left(-\frac{bc}{x_0} t\right) - \mu^2} = \frac{x_0 (1 - \mu^2)}{\exp\left(\frac{(1 - \mu^2) \cdot bt}{\theta} t\right) - \mu^2},$$

где $\mu = \eta\theta$ - коэффициент превосходства одной стороны над другой.

Проведя аналогичные преобразования для $y(t)$, окончательно получим:

$$x(t) = \frac{x_0 (1 - \mu^2)}{\exp\left(\frac{(1 - \mu^2) \cdot bt}{\theta} t\right) - \mu^2};. \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{y_0 (1 - \mu^2)}{\exp((1 - \mu^2) \cdot \theta at) - \mu^{-2}}. \quad (5)$$

При $\mu \rangle 1$ побеждает группировка **А**, а при $\mu \langle 1$ побеждает группировка **В**.

Определим закон изменения численности сторон при равновесии, т.е. в том случае, когда $\mu = 1.$ Для этого вычислим $\lim\limits_{\mu \to 1} x(t)$, применяя правило Лопиталя

$$\lim_{\mu \to 1} \frac{x_0 (1-\mu^2)}{\exp(\frac{(1-\mu^2)\cdot bt}{\theta} t) - \mu^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= x_0 \lim_{\mu \to 1} \frac{-2\mu}{-2\mu \frac{bt}{\theta} \exp \frac{(1-\mu^2)\cdot bt}{\theta} - 2\mu} = \frac{x_0}{\frac{bt}{\theta} + 1}.$$

Аналогично вычислим $\lim\limits_{\mu \to 1} y(t)$:

$$\lim_{\mu \to 1} \frac{y_0 (1-\mu^{-2})}{\exp((1-\mu^2)\cdot \theta a t) - \mu^{-2}} = \frac{y_0}{\theta a t + 1}.$$

Таким образом, при $\mu = 1$ соотношения (4) и (5) принимают вид:

$$x(t) = \frac{x_0}{\frac{bt}{\theta} + 1}; \tag{6}$$

$$y(t) = \frac{y_0}{\theta a t + 1}. \tag{7}$$

Итак, в случае конфликтной ситуации равносильных группировок, каждая из них уменьшается по гиперболическому закону.

Определим приближённо максимальную длительность конфликтной ситуации. Пусть $\mu \rangle 1$. Тогда побеждающей стороной будет группировка **В**, так как

$$x'(t) = -\frac{x_0 (1-\mu^2)\cdot b \cdot \exp\left(\frac{(1-\mu^2)\cdot bt}{\theta}\right)}{\theta\left(\exp\left(\frac{(1-\mu^2)\cdot bt}{\theta}\right) - \mu^2\right)^2} \langle 0,$$

то функция $x(t)$ монотонно убывает.

Приближённо можно считать, что группировка **А** уничтожена, если выполняется условие

$$x(t_0) = \frac{(1-\mu^2)\cdot x_0}{\exp\left(\frac{(1-\mu^2)\cdot bt}{\theta}\right) - \mu^2} = 0.5,$$

откуда

$$t_0 = \frac{\theta \ln\left(2(1-\mu^2)\cdot x_0 + \mu^2\right)}{(1-\mu^2)b}. \tag{8}$$

При $\mu \rangle 1$ побеждающей стороной будет группировка **A**. Проводя соответствующие выкладки для соотношения

$$y(t) = \frac{(1-\mu^{-2})\cdot y_0}{\exp[(1-\mu^{-2})\cdot \theta at] - \mu^{-2}}, \tag{9}$$

выражающего зависимость численности стороны **B** от времени проведения конфликтной ситуации, получим следующее приближённое значение t'_0 - времени окончания конфликтной ситуации

$$t'_0 = \frac{\ln\left[2(1-\mu^{-2})\cdot y_0 + \mu^{-2}\right]}{(1-\mu^{-2})\cdot \theta a}. \tag{10}$$

Приведенные соотношения иллюстрируют необходимость максимальной концентрации сил на направлении главного удара для скорейшего достижения победы над противником с обеспечением минимальных потерь в своих силах и средствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мороз Ф.В., Кембелл Д.Е. Методы исследования операций. – М.: Сов. радио, 1965. – 286 с.

Поступила в редколлегию 18.05.2001