УДК 629.75

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ВЫКЛЮЧЕННЫМ ДВИГАТЕЛЕМ ПРИ МЕЖВИДОВОЙ УНИВЕРСАЛИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

д.т.н., проф. О.Н. Фоменко, к.т.н. А.А. Журавлев

Рассматривается математическая модель управляемого движения в атмосфере центра масс универсального летательного аппарата (ЛА) с минимально возможным временем выключения двигателя по выгоранию топлива. Проводится анализ неопределенностей различной физической природы и предлагается методика идентификации аэродинамических характеристик по измерениям, проводимым бортовыми техническими средствами в полете.

Проведение межвидовой универсализации и проектирование универсального ЛА [1], предназначенного для достижения различного класса целей, расположенных на поверхности Земли или/и движущихся с различными скоростями в атмосфере, связано с необходимостью обоснования универсальной математической модели движения центра масс при выключении двигателя после выгорания топлива в условиях неопределенности. Неопределенность возникает на этапе НИОКР и входит в модель в виде различных неопределенных параметров с заданным диапазоном их изменения. К ним относятся аэродинамические характеристики ЛА, потребные управляющие аэродинамические силы, которые позволили бы ЛА быть перехватчиком воздушной цели, либо достигать наземные цели с заданной точностью.

На рис. 1 ЛА, обозначенный буквой **Г**, в начальный момент времени $\mathbf{t_н}$ находится в точке **1** и движется к цели **Ц**, расположенной на земле. Последовательные положения **Г** на траектории в моменты времени $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$, $\mathbf{t_4}$, $\mathbf{t_5}$ обозначены соответствующими точками. Другой ЛА, обозначенный буквой **А**, в момент времени $\mathbf{t_2}$ находится в точке **2** и стремится сблизиться с **Г**, т.е. цель движется в пространстве. Последовательные положения **А** на траектории также обозначены соответствующими точками. Текущее расстояние между ЛА **Г** и **А** в одинаковые

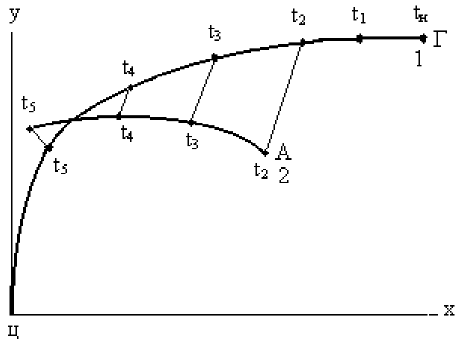

Рис. 1. Траектория сближения ЛА

моменты времени обозначены соответствующими отрезками.

Межвидовая универсализация ЛА требует обеспечения минимально возможного времени работы двигателя при перехвате ЛА **Г** летательным аппаратом **А** для увеличения вероятности поражения движущейся цели. С другой стороны, минимально возможное время разгона ЛА **Г** до требуемой скорости позволяет уменьшить вероятность его перехвата. В работе [1] математическая модель позволяет обеспечить минимизацию времени работы двигателя путем достижения максимально возможной осевой перегрузки. При проектировании выбираются пути получения информации о неопределенностях, базирующиеся как на анализе физических явлений, так и на использовании дополнительной информации от различных технических средств измерения на всех этапах жизненного цикла изделия. На этапе летно-конструкторских испытаний изделия уточняются аэродинамические характеристики. При этом бортовые измерители и вычислительное устройство должны использоваться не только для управления движением, но и для идентификации в полете значений аэродинамического качества и аэродинамических коэффициентов, а также неопределенных конструктивных параметров в естественных условиях реализации широкого класса траекторий и в нештатных ситуациях.

Конструктивные неопределенные параметры являются константами на определенном интервале времени. Следует выделять промежутки «реального времени», отличающиеся масштабными коэффициентами реального времени для следующих этапов проектирования: эксплуатации, предстартовой адаптации структуры ЛА, полета и адаптации структуры в течение жизненного цикла изделия. Для каждого этапа и своего реального времени масштабные коэффициенты могут отличаться на один или несколько порядков. От вида этих констант будет зависеть универсальная математическая модель.

Рассмотрим управляемый полет на небольшую дальность с выключенным двигателем в вертикальной плоскости начальной стартовой системы координат под действием аэродинамической силы и силы тяжести. Предположим, что измерение линейных параметров движения осуществляется двумя акселерометрами, расположенными в центре масс ЛА, оси чувствительности которых стабилизированы в инерциальном пространстве и параллельны соответствующим осям начальной стартовой системы координат. Такое движение может быть описано системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x}} - \mathbf{g}_{\mathbf{x}}; \qquad \ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y}} - \mathbf{g}_{\mathbf{y}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ - координаты центра масс; $\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y}}$ - измеряемые значения соответствующих проекций кажущегося ускорения на оси чувствительности акселерометров; $\mathbf{g}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{g}_{\mathbf{y}}$ - проекции ускорения силы земного притяжения в данной точке траектории на соответствующие оси.

В свою очередь, измеряемые проекции кажущегося ускорения, вызванные действием только аэродинамической силы, связаны с конструктивными параметрами ЛА и параметрами движения следующими соотношениями:

$$\dot{\mathbf{w}}_x = -\rho\,\mathbf{v}\left(\sigma_x\,\dot{\mathbf{x}} + \sigma_y\,\dot{\mathbf{y}}\right); \qquad \dot{\mathbf{w}}_y = -\rho\,\mathbf{v}\left(\sigma_x\,\dot{\mathbf{y}} - \sigma_y\,\dot{\mathbf{x}}\right), \tag{2}$$

где $\sigma_x = C_x \frac{S_м}{2m}$; $\sigma_y = C_y \frac{S_м}{2m}$ - баллистические коэффициенты; $\mathbf{v}$ - модуль вектора скорости; ρ - плотность воздуха; неопределенные конструктивные параметры σ_x, σ_y являются заданной функцией других неопределенных параметров: $\mathbf{m}$ – массы, имеющей постоянное значение; $S_м$ – площади миделевого сечения; C_X, $C_У$ - аэродинамические коэффициенты, которые принадлежат множествам: $C_y \in \Omega_{C_y}$; $C_x \in \Omega_{C_x}$; $m \in \Omega_m$; $S_м \in \Omega_{S_м}$.

Проекция ускорения на касательную к точке траектории вычисляется по выражению

$$\dot{\mathbf{v}} = -\sigma_x\,\rho\,\mathbf{v}^2 - g\sin\theta. \tag{3}$$

Уравнения кинематических связей имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\cos\theta; \qquad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}\sin\theta, \tag{4}$$

где θ - угол наклона вектора скорости к стартовому горизонту.

Кинематические соотношения имеют вид

$$\alpha = \vartheta - \theta; \qquad \theta = \operatorname{arctg} \mathbf{b}, \tag{5}$$

где $\mathbf{b} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$; α - угол атаки; ϑ – угол тангажа, который может быть измерен.

Значения производных $\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}$ и модуля вектора скорости $\mathbf{v}$ вычисляются в бортовой цифровой вычислительной машине (БЦВМ) в ходе решения навигационной задачи путем численного интегрирования уравнений (1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \int_{t_н}^{t} (\dot{\mathbf{w}}_x - g_x)\,dt; \quad \dot{\mathbf{y}} = \int_{t_н}^{t} (\dot{\mathbf{w}}_y - g_y)\,dt; \quad \mathbf{v} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \tag{6}$$

где $t_н$ – момент начала движения с выключенным двигателем.

Дополнительно значение модуля вектора скорости $\mathbf{v}$ может быть получено при обработке сигналов от спутниковой навигационной системы с достаточной точностью.

Неопределенные аэродинамические коэффициенты C_x, C_y, зависящие от числа Маха **M,** числа Рейнольдса **Re** и угла атаки α определяются функциями вида:

$$C_x = C_{x0} + C_x^{\alpha}\,\alpha^2; \qquad C_y = C_y^{\alpha}\,\alpha, \tag{7}$$

где $C_{x0} \in \Omega_{C_{x0}}$; $C_x^\alpha \in \Omega_{C_{x0}}$; $C_y^\alpha \in \Omega_{C_y^\alpha}$ – неопределенные коэффициенты аппроксимации. Управляющей функцией в рассматриваемой модели является угол атаки α, от величины которого зависит значение и ориентация аэродинамической силы.

Плотность воздуха по своей физической природе является неопределенной величиной, которая для изотермической модели атмосферы может быть описана неопределенностным представлением в функции от высоты **h:**

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta h}; \qquad h = h_0 + \frac{y}{\cos\gamma} + R_3\left(\frac{1}{\cos\gamma} - 1\right); \qquad \gamma = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{R_3 + y}, \tag{8}$$

где $\rho_0 \in \Omega_{\rho_0}$ - плотность воздуха на уровне моря; h_0 – высота точки старта над уровнем моря; R_3 – радиус Земли; $\beta \in \Omega_\beta$ – коэффициент аппроксимации.

Начальные условия движения ЛА с выключенным двигателем определяются в неопределенный заранее момент $t_н \in \Omega_{t_н}$, отсчитываемый от момента старта t_0 :

$$t_н = t_0 + \tau, \; \tau \in \Omega_\tau, \tag{9}$$

где τ - неопределенное заранее время работы твердотопливного двигателя, минимизируемое по методике [1] и зависящее от начальной массы твердого топлива, массового секундного расхода газов через сопло, скорости горения, поверхности горения и плотности топлива.

Априорная неопределенность момента выключения двигателя обуславливает неопределенность начальных условий, принадлежащих некоторым областям с соответствующими индексами Ω и широкими диапазонами изменения параметров движения ЛА:

$$x(t_н) \in \Omega_{x_н}; \qquad y(t_н) \in \Omega_{y_н}; \qquad v(t_н) \in \Omega_{v_н}; \qquad \theta(t_н) \in \Omega_{\theta_н}. \tag{10}$$

Эти области определяются условиями пуска: геодезическими координатами точки старта, азимутом направления пуска; энергетическими характеристиками двигательной установки, а также предыдущим движением. Естественно, что на этапе проектирования сведения об этих условиях отсутствуют.

Цель проектирования состоит в выборе траекторий центра масс ЛА, структуры и основных проектно - конструктивных параметров универсального ЛА и системы управления, обеспечивающих в априорно неопределенный момент времени $t_k \in \Omega_{t_k}$ минимум промаха

$$I = \min_t \sqrt{\left[x(t) - x_ц(t)\right]^2 + \left[y(t) - y_ц(t)\right]^2}, \tag{11}$$

где $\mathbf{x_ц}, \mathbf{y_ц}$ – априорно неопределенные координаты цели. В различных задачах цель неподвижна или движется с различными скоростями по Земле или в атмосфере.

Универсальный ЛА должен иметь возможность реализовывать широкий класс различных траекторий, проходящих как в атмосфере, так и за ее пределами. Классы траекторий определяются из тактических соображений обеспечения максимальной эффективности системы. А систему управления и основные конструктивные параметры объекта проектируют так, чтобы обеспечить движение по желаемой траектории. Желаемая траектория в силу динамики позволяет легко определять силы, необходимые для ее реализации, тем самым обосновывать требования к управляемости и маневренности универсального ЛА.

Рассматривается возможный способ аппроксимации желаемой траектории. В плоскости стрельбы желаемая траектория, как для ЛА **Г** так и для ЛА **А,** задается сплайн функциями в виде кусочно-кубической аппроксимации, (один участок которой изображен на рис.2) :

$$\mathbf{y_{si}}^* = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{3} \mathbf{a_{ji}}\, \Delta \mathbf{x_{si}}^{j}; \qquad (12)$$

$$\mathbf{a_{ji}} \in \Omega_{\mathbf{a_{ji}}};\ \Delta \mathbf{x_{si}} = \mathbf{x_s} - \mathbf{x^*_{si}};\ \mathbf{x^*_{si}} \in \Omega_{\mathbf{x^*_i}};$$

$$\mathbf{x_s} \in \left[\mathbf{x^*_{si}}, \mathbf{x^*_{s\,i+1}}\right[; \qquad \Delta \mathbf{x^*_{si}} = \mathbf{x^*_{s\,i+1}} - \mathbf{x^*_{si}},$$

где **s** –принимает значения **Г** или **А**; **i**, **N** – номер и число участков аппроксимации; $\mathbf{a_{ji}}$ - неопределенные заранее коэффициенты, принадлежащие областям $\mathbf{\Omega}$ с соответствующими индексами;

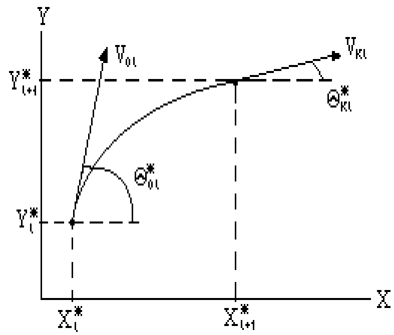

Рис.2. Участок аппроксимации желаемой траектории

$\mathbf{x^*_{si}}$ -значение **i** - го участка аппроксимации, принадлежащее области $\mathbf{\Omega}$; y_{si}^* - желаемое значение координаты $\mathbf{y_s}$; верхний символ * обозначает желаемое значение. В последующих выражениях индекс **s** опущен. Эти коэффициенты могут быть выражены через $\mathbf{y_{0i}}, \theta_{0i}$ начальные условия и $\mathbf{y_{ki}}, \theta_{ki}$ требуемые конечные условия рассматриваемого участка аппроксимации:

$$\mathbf{a_{0i}} = \mathbf{y_{0i}};\quad \mathbf{a_{1i}} = \mathbf{tg}\,\theta_{0i};\quad \mathbf{a_{2i}} = -\frac{1}{\Delta \mathbf{x^*_i}}\left[3\frac{\mathbf{y_{0i}} - \mathbf{y_{ki}}}{\Delta \mathbf{x^*_i}} + 2\,\mathbf{tg}\,\theta_{0i} + \mathbf{tg}\,\theta_{ki}\right];$$

$$\mathbf{a_{3i}=\frac{1}{\Delta x_i^{*2}}\left[2\frac{y_{0i}-y_{ki}}{\Delta x_i^*}+tg\,\theta_{0i}+tg\,\theta_{ki}\right]}. \qquad (13)$$

Стыковка участков аппроксимации обеспечивается выполнением условий:

$$\mathbf{y_{0i}=y_{k\,i-1};\quad tg\,\theta_{0i}=tg\,\theta_{k\,i-1}}.$$

В общем случае, чтобы полностью задать траекторию (12), необходимо определить количество участков аппроксимации $\mathbf{N}$, величину каждого участка $\mathbf{\Delta x^*_{s\,i}}$ и требуемые в конце каждого участка (кроме последнего) значения $\mathbf{y_{k\,i},\ \theta_{k\,i},\ i\neq N}$. Естественно, что значения $\mathbf{x^*_{sN};y^*_{skN}}$ должны совпадать с соответствующими координатами цели $\mathbf{x_ц;y_ц}$. На каждом $\mathbf{i}$ - м участке возможно варьировать значением y_{si}^* относительно значений $\mathbf{y}$, соответствующих баллистической траектории (получаемой при $\boldsymbol{\alpha=0}$), а также значением желаемого угла $\mathbf{\theta_{k\,i}}$. При этом получается семейство различных участков траекторий.

Требуемое значение угла наклона вектора скорости для $\mathbf{i}$ - го участка аппроксимации определяется выражениями:

$$\mathbf{\theta_i^*=arctg\frac{d\,y_i^*}{d\,x}=arctg\,p_i;\qquad p_i=3a_{3i}\,\Delta x_i^2+2a_{2i}\,\Delta x_i+a_{1i}}. \qquad (14)$$

Возьмем вторую производную от (12) по $\mathbf{x}$ $\mathbf{(y_i^*)''}$, выразим ее через первые $\mathbf{\dot{x},\dot{y}}$ и вторые $\mathbf{\ddot{x},\ddot{y}}$ производные по времени и после преобразований получим выражение, в силу динамики описывающее нормальное ускорение, которое будет действовать на ЛА при движении по желаемой траектории

$$\mathbf{v\dot{\theta}_i=(6a_{3i}\Delta x_i+2a_{2i})\cos^3\theta_i^*\,v^2}. \qquad (15)$$

Требуемую нормальную перегрузку, реализующую траекторию (11) в силу динамики определяет соотношение

$$\mathbf{n_{n\,i}=\frac{\cos\theta_i^*}{g_0}\left((6a_{3i}\Delta x_i+2a_{2i})\cos^2\theta_i^*\,v^2+g\right)}. \qquad (16)$$

Так как при движении ЛА в атмосфере, нормальная перегрузка создается подъемной силой, значение которой определяется углом атаки, то требуемое программное значение угла атаки может быть вычислено по выражению

$$\mathbf{\alpha_i^*=\frac{\sigma_1\cos\theta_i^*}{\rho}\left((6a_{3i}\Delta x_i+2a_{2i})\cos^2\theta_i^*+\frac{g}{v^2}\right)},\ \text{где}\ \mathbf{\sigma_1=\frac{2m}{C_y^\alpha S_м}}. \qquad (17)$$

Требуемое программное значение угла тангажа вычисляется по соотношению

$$\vartheta_i^* = \frac{\sigma_1}{\rho} \frac{6a_{3i}\Delta x_i + 2a_{2i} + \frac{g}{\dot{x}^2}}{\left(\sqrt{1+b^2}\right)^3} + \mathrm{arctg}\, b \,. \qquad (18)$$

Время движения ЛА по дуге s i–го участка аппроксимации заданной траектории (12) может быть определено по выражению

$$t_i = \int\limits_{s_{0i}}^{s_{ki}} \frac{ds}{v}, \text{ где } ds = \sqrt{1+y'^2}dx; \; s = \int\limits_{x_{0i}}^{x_{ki}} \sqrt{1+y'^2}dx \,. \qquad (19)$$

Значения аэродинамических коэффициентов определяются на основе объемных аэродинамических расчетов, проводимых на вычислительной машине. Эти же значения могут быть получены в ходе продувки аэродинамически подобных моделей ЛА в аэродинамических трубах с последующим пересчетом значений измеренных величин в соответствующие коэффициенты ЛА натуральной величины. Но невозможно путем продувки в трубах исследовать аэродинамические характеристики во всем диапазоне возможных скоростей ЛА и при различных режимах турбулентного обтекания при маневрировании. Точность получения сведений об аэродинамических коэффициентах невысока, предельная ошибка определения достигает 50–75 %.

На этапе летно-конструкторских испытаний предоставляется возможность их уточнять по результатам внешнетраекторных измерений, а также по измерениям бортовых датчиков. На этом этапе жизненного цикла изделия бортовые измерители и БЦВМ могут быть использованы не только для управления движением, но и для оценки непосредственно в полете значений аэродинамических сил и коэффициентов, неопределенных конструктивных параметров. Полученные результаты должны сохраняться в запоминающем устройстве для статистической обработки после полета. Для вычислений по соотношениям (17), (18) необходимо знать σ_1 - значение функции неопределенных конструктивных параметров, которое может быть оценено по следующему выражению на основе измеренных значений $\dot{w}_x, \dot{w}_y, \vartheta$ и значений $\dot{x}, \dot{y}, v$, вычисленных в навигационном алгоритме

$$\sigma_1 = (\vartheta - \mathrm{arctg}\, b)\frac{v^3}{\dot{y}\dot{w}_x - \dot{x}\dot{w}_y} \,. \qquad (20)$$

Используя соотношения (2), описывающие значения проекций кажущегося ускорения, разделим $\dot{w}_y$ на $\dot{w}_x$ и, после преобразований, получим выражение для идентификации значения аэродинамического качества

$$K = \frac{C_y}{C_x} = \frac{b\dot{w}_x - \dot{w}_y}{\dot{w}_x + b\dot{w}_y} \,. \qquad (21)$$

где значения **b** вычисляются по выражениям (5) и (6).

Если акселерометры закреплены на корпусе ЛА и оси чувствительности их направлены по соответствующим осям связанной системы координат, то, пренебрегая ускорениями, вызываемыми вращением вокруг центра масс, значение аэродинамического качества может быть идентифицировано по соотношению

$$\mathbf{K} = \frac{\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x1}}\,\mathbf{c} + \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y1}}\,\mathbf{d}}{\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x1}}\,\mathbf{d} - \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y1}}\,\mathbf{c}}, \tag{22}$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{b}\cos\vartheta - \sin\vartheta$; $\mathbf{d} = \cos\vartheta + \mathbf{b}\sin\vartheta$.

Значения аэродинамических коэффициентов $\mathbf{C_X}$, $\mathbf{C_Y}$ могут быть оценены на основе выражений:

$$\mathbf{C_x} = \frac{2\mathbf{m}}{\mathbf{S_м}}\frac{1}{\rho\mathbf{v}^2}\left[\sin\vartheta\left(\mathbf{b}\,\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x1}} + \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y1}}\right) - \cos\vartheta\left(\mathbf{b}\,\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y1}} - \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x1}}\right)\right];$$

$$\mathbf{C_y} = \frac{2\mathbf{m}}{\mathbf{S_м}}\frac{1}{\rho\mathbf{v}^2}\left[\sin\vartheta\left(\mathbf{b}\,\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y1}} - \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x1}}\right) + \cos\vartheta\left(\mathbf{b}\,\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x1}} + \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{y1}}\right)\right]. \tag{23}$$

Вычисленные по соотношениям (20) - (23) значения σ_1, **К**, $\mathbf{C_X}$, $\mathbf{C_Y}$ при всевозможных скоростях, высотах и маневрах ЛА должны записываться в специальное запоминающее устройство для сохранения и послеполетной статистической обработки с учетом инструментальных погрешностей.

Комплексная статистическая обработка данных, полученных от различных наземных и бортовых измерителей, позволит значительно сузить область неопределенности аэродинамических коэффициентов и значительно удешевить процесс получения достоверной информации об аэродинамических силах и моментах, действовавших в полете, для уточнения характеристик рассеивания точек падения, гарантированной дальности полета и прочностных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фоменко О.Н., Журавлев А.А. Построение математической модели и классификация неопределенностей в ней для задач межвидовой универсализации летательных аппаратов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вип. 2 (12). – С. 202 - 210.

Поступила в редколлегию 18.06.2001