УДК 681.332

АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ СУЖДЕНИЙ

к.т.н. Ю.А. Гусак, к.т.н. А.А. Попеленко, О.В. Махлов
(представил проф. Ю.Е. Онуфрей)

В статье предлагаются алгоритмы коррекции суждений экспертов, представляемых матрицей парных сравнений.

В теории системного анализа существует большой класс задач, решение которых возможно только на основе экспертных данных. При этом всегда возникает проблема, связанная с оценкой согласованности суждений группы экспертов, а в некоторых задачах и согласованности суждений одного эксперта. Несогласованность суждений экспертов обычно возникает в тех случаях, когда эксперту приходиться оценивать достаточно большие выборки объектов. Поэтому актуальной является задача разработки экспертных систем, обеспечивающих требуемый уровень согласованности на основе коррекции экспертных суждений. Оценить согласованность мнений эксперта позволяет метод главного собственного вектора, в котором оценка согласованности экспертных суждений, представленных в виде матрицы парных сравнений, производится с использованием индекса согласованности $\mathbf{I}_s$. Индекс согласованности $\mathbf{I}_s$ определяется соотношением

$$\mathbf{I_s = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}},$$

где $\mathbf{n}$ - порядок матрицы парных сравнений $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_{ij}\}$, $\mathbf{i, j = \overline{1, n}}$;

$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}$ - максимальное собственное значение матрицы **A**.

Значение $\mathbf{I}_s < \mathbf{0{,}1}$ считается практически приемлемым для последующего вычисления вектора приоритетов $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_i\}$, где $\mathbf{i=1, \dots, n}$, по матрице **A**. Вектор **W** получается в результате нормализации главного собственного вектора матрицы **A**, соответствующего максимальному собственному значению $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}$.

Если значение $\mathbf{I}_s > \mathbf{0{,}1}$, то представленные экспертом данные несогласованны и их не рекомендуется использовать для характеризации представленных на экспертизу объектов [1]. Поэтому для коррекции мнения эксперта необходимо либо провести следующий тур экспертного опроса, либо применить алгоритмы коррекции, описанные, например, в [2].

Алгоритмы коррекции представляют собой многошаговые процедуры. На каждом шаге по выбранному критерию определяется подмножество таких элементов матрицы парных сравнений, что их коррекция повышает согласованность экспертных суждений. Сложность обоснования критериев выбора корректируемых элементов обусловлена невозможностью получения точного аналитического решения задачи о собственных значениях для матриц порядка $\mathbf{n > 4}$. Но фундаментальные свойства матрицы парных сравнений, построенной в шкале отношений Саати, позволяют сформулировать эмпирические алгоритмы коррекции, повышающие уровень согласованности экспертных суждений.

Как показано в [1], матрица парных сравнений является положительной обратной симметричной матрицей. Если суждения согласованы, т.е. если

$$\mathbf{a_{ij} = a_{ik}\, a_{kj}}, \quad \forall\ \mathbf{i, j, k}\ ,$$

то имеется единственное собственное значение, не равное нулю

$$\boldsymbol{\lambda_{max} = n};$$

ранг матрицы парных сравнений равен единице и

$$\mathbf{a_{ij} = w_i / w_j}\ , \quad \forall \mathbf{i, j}\ .$$

Эти свойства легли в основу предлагаемых алгоритмов коррекции экспертных суждений. В этих алгоритмах многошаговый процесс коррекции матрицы парных сравнений прекращается при достижении $\mathbf{I_s<0{,}1}$, а сам процесс имеет итерационный характер и направлен на получение

$$\mathbf{a_{ij}^{*} \rightarrow w_i^{*}/w_j^{*}}\ , \ \forall \mathbf{i, j},$$

где $\mathbf{a_{ij}^{*}}$ – некоторое согласованное мнение эксперта; $\mathbf{w_i^{*}}$ и $\mathbf{w_j^{*}}$ - искомые приоритеты. В основе трех алгоритмов лежит предположение о том, что замена в матрице парных сравнений элемента $\mathbf{a_{ij}}$ на отношение $\mathbf{w_i/w_j}$, уменьшит величину $\mathbf{I_s}$. При этом уменьшение на каждом шаге $\mathbf{I_s}$ означает сходимость процесса коррекции.

В первом алгоритме по критерию максимума модуля разности элементов матрицы парных сравнений и соответствующих им отношений приоритетов находится некоторый элемент $\mathbf{a_{kq}}$, который заменяется на отношение $\mathbf{w_k/w_q}$. Процесс коррекции прекращается при $\mathbf{I_s < 0,\ 1}$.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Ввод матрицы $\mathbf{A=\{a_{ij}\},i,j=1,\ldots,n}$.

Шаг 2. Вычисление λ_{max} и вектора $\mathbf{W=\{w_i\},\ i=1,\ldots,n}$.

Шаг 3. Вычисление $\mathbf{I_s}$.

Шаг 4. Если $\mathbf{I_s<0{,}1}$, то переход на шаг 10, иначе – шаг 5.

Шаг 5. Формирование матрицы $\mathbf{Z = \{z_{ij} \mid z_{ij} = w_i / w_j\},\ i,j=1,\ldots,n}$.

Шаг 6. Определение строки $\mathbf{k}$, для которой $\max\limits_{\mathbf{i}} \sum\limits_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} |\mathbf{a_{ij} - z_{ij}}|$.

Шаг 7. Определение столбца **q**, для которого $\max\limits_{j} |a_{kj} - z_{kj}|$.

Шаг 8. Коррекция матрицы **A** $a_{kq} = z_{kq}$.

Шаг 9. Переход на шаг 2.

Шаг 10. Останов.

Эксперименты с экспертными матрицами парных сравнений показали, что при использовании данного алгоритма возможно «зацикливание» процедуры коррекции, т.е. начиная с определенного шага, индекс согласованности I_s перестает уменьшаться. Чтобы избежать этого в приведенном ниже алгоритме предлагается вместо замены одного элемента матрицы парных сравнений заменить всю строку. Сходимость процесса корректировки при этом увеличивается. Однако, выбор такой области коррекции может привести к потере значительной части информации, представляемой экспертными данными.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Ввод матрицы $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,\dots,n$.

Шаг 2. Вычисление λ_{max} и вектора $W=\{w_i\}$, $i=1,\dots,n$.

Шаг 3. Вычисление I_s.

Шаг 4. Если $I_s<0{,}1$, то переход на шаг 9; иначе – шаг 5.

Шаг 5. Формирование матрицы $Z = \{z_{ij} \mid z_{ij} = w_i / w_j\}$, $i,j=1,\dots,n$.

Шаг 6. Определение строки **k**, для которой $\max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} - z_{ij}|$.

Шаг 7. Коррекция матрицы **A** $a_{kq} = z_{kq}$.

Шаг 8. Переход на шаг 2.

Шаг 9. Останов.

Эксперименты показали, что при использовании данного алгоритма количество шагов коррекции по сравнению с алгоритмом 1 уменьшилось.

Алгоритм 3.

Шаг 1. Ввод матрицы $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,\dots,n$.

Шаг 2. Вычисление λ_{max} и вектора $W=\{w_i\}$, $i=1,\dots,n$.

Шаг 3. Вычисление I_s.

Шаг 4. Если $I_s<0{,}1$, то переход на шаг 9; иначе – шаг 5.

Шаг 5. Формирование матрицы $D=\{d_{ij} \mid d_{ij}=a_{ij}/(w_i / w_j)\}$, $i,j=1,\dots,n$.

Шаг 6. Определение элемента d_{kq} матрицы **D** для которого

$\max\limits_{i,j}(d_{ij} + 1/d_{ij})$.

Шаг 7. Коррекция матрицы **A** $a_{kq} = w_k / w_q, a_{qk} = 1/a_{kq}$.

Шаг 8. Переход на шаг 2.

Шаг 9. Останов.

Использование данного алгоритма представляется теоретически более обоснованным, так как выбор очередного элемента матрицы парных сравнений для коррекции осуществляется в соответствии с его вкладом в индекс несогласованности.

Действительно, как показано в[1], индекс согласованности $\mathbf{I_s}$ можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{I_s = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (d_{ij} + 1/d_{ij})}, \text{ где } \mathbf{d_{ij} = a_{ij}/(w_i/w_j)}.$$

Следовательно, выбор $\mathbf{d_{kq} = \max\limits_{i,j}(d_{ij} + 1/d_{ij})}$ обеспечивает максимально возможное на данном шаге уменьшение индекса согласованности.

Работоспособность алгоритмов проверена на экспертных матрицах, имеющих порядок $\mathbf{n}$ = 6,7,8,9 и 10 при начальной несогласованности $\mathbf{I_s \geq 0,2}$. Оценивалось количество шагов коррекции α_1, α_2, α_3 алгоритмов 1, 2 и 3 исходной матрицы парных сравнений **A** для достижения $\mathbf{I_s < 0,1}$. Во всех случаях количество шагов коррекции меньше или равно пяти, причем $\alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_1$.

Все рассмотренные алгоритмы обладают тем свойством, что при проведении коррекции не нарушается начальное упорядочивание представленных на экспертизу объектов. Указанные алгоритмы коррекции экспертных суждений реализованы в диалоговой информационно - расчетной системе “Рейтинг - К” [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
2. Корчава М.О., Цигриашвили Э.Н. Диалоговая система «САЭСМА» для анализа взаимодействий в системах с иерархической структурой // Алгоритмы и программы. Информационный бюллетень ВНТИ Центр. – 1986. – № 2. – С. 36 - 49 .
3. Гусак Ю.А., Попеленко А.А. Информационно - расчетная система “Рейтинг-К”. – Харьков : ХВУ, 2001. – 120 с.

Поступила в редколлегию 23.04.2001