УДК 621.327

# СЖИМАЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА ОСНОВЕ КОДИРОВАНИЯ МАССИВОВ ДЛИН СЕРИЙ

Н.А. Королёва
(представил д.т.н., проф. В.А. Краснобаев)

Излагается метод отображения последовательностей одинаковых элементов изображений в пространство полиадических кодов длин серий. Рассматриваются необходимые и достаточные условия для обеспечения сжатия фрагментов изображений. Доказываются компенсирующие свойства полиадических кодов длин серий.

Сжимающее отображение заключается в том, что пространство исходного фрагмента изображения отображается в пространство полиадических кодов длин серий. При этом последовательность преобразований выглядит следующим образом: <<**Исходный фрагмент изображения – массив длин серий – последовательность полиадических кодов**>>. Для доказательства того, что отображение является сжимающим, рассмотрим динамику изменения размерностей пространств после каждого этапа преобразований.

В результате формирования массивов длин серий для предложенной организации [1] каждый фрагмент изображения заменяется на массив **L**. Поскольку изображение нестационарное, то фрагменты будут иметь переменные размеры для разных частей кадра. Поэтому можно сказать, что в результате образования всех массивов **L** исходное изображение, разрезанное на неравномерные фрагменты, заменяется блоками (массивами длин серий) равных размеров (в пределах одного кадра, рис.1). При этом каждый фрагмент изображения может состоять из одной, нескольких строк или ее некоторой части (рис. 1). На рис. 1 количество строк в фрагменте изображения обозначено как $\mathbf{\nu_{стр}}$. Тогда $\mathbf{\nu_{стр} > 1}$, если фрагмент состоит из более чем одной строки (фрагмент **1** на рис. 1); $\mathbf{\nu_{стр} = 1}$ - фрагмент содержит одну строку (фрагмент **3** на рис. 1); $\mathbf{\nu_{стр} < 1}$ - фрагмент образуется как часть строки (фрагмент **2** на рис. 1). Под *размерностью пространства* будем понимать суммарное количество разрядов, затрачиваемых на представление данных на каждом этапе обработки. Обозначим через $\mathbf{|R_f|}$ - размерность исходного фрагмента изображения. Она равна

$$\mathbf{|R_f| = n_{стр}\, \nu_{стр}\, \ell og_2\, B},$$

где $\mathbf{n_{стр}}$ - количество элементов в строке изображения;

$\mathbf{B}$ – количество уровней яркости (для полутоновых изображений) или количество цветов (для цветных изображений);

$\ell\mathbf{og_2\,B}$ - число разрядов, необходимых для представления элемента изображения.


Рис. 1. Пример изображения разрезанного на три неравных фрагмента

В результате образования для фрагмента изображения массива длин серий пространство $\mathbf{R_f}$ отображается в пространство $\mathbf{R_{ds}}$ (массива длин серий) $\mathbf{R_f} \to \mathbf{R_{ds}}$. При этом размерность $|\mathbf{R_{ds}}|$ массива длин серий равна [2]:

$$|\mathbf{R_{ds}}| = \mathbf{m_{дс}\,n_{дс}}\,\ell\mathbf{og_2}\,\ell_{\mathbf{max}} \ ,$$

где $\mathbf{m_{дс}}, \mathbf{n_{дс}}$ - соответственно количество строк и столбцов в массиве длин серий; $\ell\mathbf{og_2}\,\ell_{\mathbf{max}}$ - число разрядов, отводимых для представления длины серии (с учетом ограничения на максимально возможную длину серии).

Поскольку длина серии равна количеству одинаковых элементов в последовательности (по определению), то ее минимальное значение будет равно единице. Отсюда следует, что количество элементов в массиве $\mathbf{L}$ будет не больше, чем количество элементов в фрагменте изображения

$$\mathbf{m_{дс}\,n_{дс}} \le \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{стр}}\,\mathbf{n_{стр}} \ .$$

Значит, за счет формирования массивов длин серий происходит уменьшение количества элементов (остаются наиболее информативные). Однако, сжатие изображений может быть достигнуто только при условии, когда снижается размерность пространства $\mathbf{R_f}$ :

$$\left|\mathbf{R_f}\right| > \left|\mathbf{R_{ds}}\right|. \tag{1}$$

Неравенство (1) является необходимым, но не достаточным условием обеспечения сжатия, поскольку требуется дополнительно затрачивать разряды на представление служебной информации (информации о цветовых координатах). Определим на основе неравенства (1) пороговое значение максимальной длины серии $\ell_{\mathbf{max}}$, при котором может быть достигнуто сжатие изображения. Для этого приравняем значения размерности для фрагмента изображения и соответствующего ему массива длин серий

$$\mathbf{n_{стр}}\,\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{стр}}\,\ell\mathbf{og_2\,B} = \mathbf{m_{дс}}\,\mathbf{n_{дс}}\,\ell\mathbf{og_2}\,\ell_{\mathbf{max}}.$$

Откуда найдем значение $\ell_{\mathbf{max}}$ :

$$\ell\mathbf{og_2}\,\ell_{\mathbf{max}} = \frac{\mathbf{n_{стр}}\,\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{стр}}\,\ell\mathbf{og_2\,B}}{\mathbf{m_{дс}}\,\mathbf{n_{дс}}}.$$

Тогда для того, чтобы выполнялось условие (1), должно выполняться неравенство

$$\ell\mathbf{og_2}\,\ell_{\mathbf{max}} < \frac{\mathbf{n_{стр}}\,\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{стр}}\,\ell\mathbf{og_2\,B}}{\mathbf{m_{дс}}\,\mathbf{n_{дс}}}. \tag{2}$$

Значит неравенство (2) является дополнительным ограничением на выбор максимально возможной длины серии $\ell_{\mathbf{max}}$, которое обусловлено требованием по обеспечению сжатия изображения. В связи с этим определим точность выбора $\ell_{\mathbf{max}}$ как степень соответствия значению **B** (параметру визуализации изображения).

В тоже время значения $\mathbf{n_{стр}}$ и $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{стр}}$ для разных фрагментов изображения будут различными. Поэтому предусмотреть заранее ограничение (2) очень сложно. Это приведет к тому, что условие (2) не будет выполняться и объем цифрового представления массива длин серий будет превосходить объем цифрового представления исходного фрагмента изображения. Примером такого случая является фрагмент изображения сильнонасыщенного деталями так, что число одинаковых элементов равно единице. Тогда, если значение $\ell_{\mathbf{max}}$ больше величины **B**, то произойдет увеличение исходного объема. При этом, чем больше неточность выбора $\ell_{\mathbf{max}}$, тем меньше коэффициент сжатия (вплоть до увеличения первоначального объема).

Докажем, что полиадическое кодирование позволяет скомпенсировать неточность выбора значения $\ell_{\mathbf{max}}$. *Под компенсирующим свойством полиадических кодов понимается возможность снизить среднюю затрату разрядов на представления длин серий и тем самым повысить коэффициент сжатия*. Такое свойство объясняется следующими причинами.

1. Полиадическое число вычисляется для значений длин серий, длина кодового представления которых не учитывается.

2. Полиадический код формируется сразу для нескольких длин серий.

При этом под средними затратами разрядов на длину серии понимается частное от деления длины полиадического кода на количество длин серий, для которых он сформирован.

Полиадическое кодирование является последним этапом преобразования сжимающего отображения. В результате вычисления полиадических чисел $\mathbf{N_j}$ для каждого столбца массива $\mathbf{L}$ формируется последовательность чисел $\{\mathbf{N_j}\}_{\mathbf{j=\overline{1,n_{дс}}}}$. Обозначим через $\mathbf{R_{пк}}$ пространство полиадических чисел $\{\mathbf{N_j}\}_{\mathbf{j=\overline{1,n_{дс}}}}$. Поскольку под каждое полиадическое число $\mathbf{N_j}$ отводится одинаковое количество разрядов равное $\mathbf{M}$, то размерность пространства $\mathbf{R_{пк}}$ будет равна

$$\left|\mathbf{R_{пк}}\right| = \mathbf{n_{дс}\,M},$$

где $\left|\mathbf{R_{пк}}\right|$ - размерность пространства полиадических чисел, сформированных для массива длин серий.

На основе сравнения размерности пространств $\mathbf{R_f}$ и $\mathbf{R_{пк}}$ следует, что в результате полиадического кодирования массивов длин серий количество элементов $\mathbf{n_{стр}\,\nu_{стр}}$ исходного фрагмента изображения сокращается до $\mathbf{n_{дс}}$ :

$$\mathbf{n_{дс} \le n_{стр}\,\nu_{стр}}\ .$$

Следовательно, за счет полиадического кодирования фрагменты изображения заменяются одномерными кодами. При этом полиадическое число (через столбец массива длин серий) ставится в соответствие некоторой части фрагмента изображения. Поэтому всю цепь последовательных преобразований можно рассматривать как неравномерное векторное квантование (рис. 2). На рис. 2 выбран фрагмент 1 изображения, представленного на рис. 1. При этом использовались следующие обозначения: $\mathbf{R_j^{(f)}}$ - часть фрагмента изображения, представляемая столбцом $\mathbf{L_j^{(f)}}$ массива длин серий $\mathbf{R_j^{(f)} \to L_j^{(f)}}$, где $\mathbf{f}$ - номер фрагмента в изображении, а $\mathbf{j}$ – индекс части в фрагменте.

В общем виде неравномерное векторное квантование (сжимающее отображение) можно представить оператором

$$\mathbf{N_j = \varphi_{пк}\left\{\varphi_{дс}\left\{R_f^j\right\}\right\}},$$

где $\varphi_{пк}, \varphi_{дс}$ - соответственно операторы полиадического кодирования и выявления серий одинаковых элементов [1, 3].

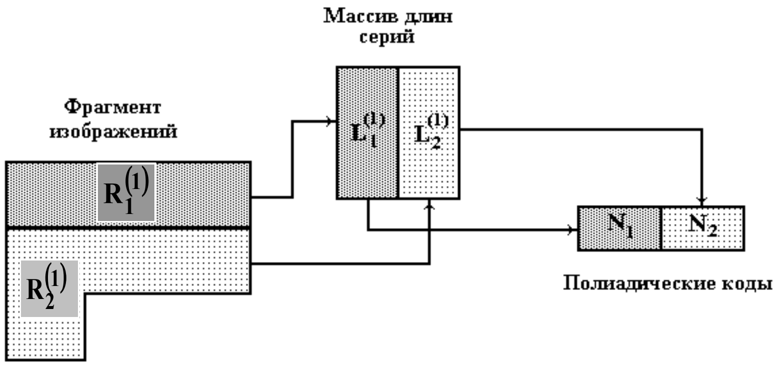


Рис. 2. Схема получения кодов - номеров для частей фрагмента изображения

Однако, сжатие фрагмента изображения будет достигнуто, если размерность пространства $\mathbf{R}_{пк}$ удовлетворяет следующим условиям:

- необходимое условие

$$|\mathbf{R}_{пк}| < |\mathbf{R}_{ds}|; \tag{3}$$

- достаточное условие

$$|\mathbf{R}_{пк}| < |\mathbf{R}_{f}|. \tag{4}$$

Докажем в начале, что выполняется неравенство (3). Для этого введем понятие *плавающего пространства* $\mathbf{R}_j$ полиадического числа $\mathbf{N}_j$. Тогда размерность пространства $\mathbf{R}_j$ равна

$$|\mathbf{R}_j| = \ell\mathbf{og}_2 \mathbf{N}_j, \tag{5}$$

где $\ell\mathbf{og}_2 \mathbf{N}_j$ - точное число разрядов, необходимых для представления полиадического числа $\mathbf{N}_j$;

$|\mathbf{R}_j|$ - размерность пространства для полиадического числа.

С учетом (5) размерность $|\mathbf{R}_{пл}|$ плавающего пространства для всей последовательности полиадических чисел $\{\mathbf{N}_j\}_{j=\overline{1,n_{дс}}}$ находится по формуле

$$|\mathbf{R}_{\text{пл}}| = \sum_{j=1}^{n_{\text{дс}}} \ell og_2 N_j . \qquad (6)$$

Причем значение любого полиадического числа (по определению [1]) меньше величины произведения всех оснований $\lambda_i$:

$$N_j < \prod_{i=1}^{m_{\text{дс}}} \lambda_i , \; j = \overline{1, n_{\text{дс}}} .$$

С другой стороны, для исключения потерь информации длина машинного слова должна быть больше, чем логарифм произведения всех оснований полиадических чисел

$$M > \ell og_2 \left( \prod_{i=1}^{m_{\text{дс}}} \lambda_i \right) .$$

Отсюда следует, что

$$M > \ell og_2 N_j . \qquad (7)$$

В тоже время длина машинного слова **M** для предложенной организации массивов длин серий связана с максимально возможной длиной серии $\ell_{max}$ соотношением

$$M = m_{\text{дс}} \ell og_2 \ell_{max} . \qquad (8)$$

Из анализа выражений (7) и (8) следует, что плавающая размерность $|\mathbf{R}_{\text{пл}}|$ пространства полиадических чисел будет меньше размерности $|\mathbf{R}_{ds}|$ массивов длин серий

$$|\mathbf{R}_{\text{пл}}| = \sum_{j=1}^{n_{\text{дс}}} \ell og_2 N_j < n_{\text{дс}} M = m_{\text{дс}} n_{\text{дс}} \ell og_2 \ell_{max} = |\mathbf{R}_{ds}| .$$

Таким образом, доказано необходимое условие обеспечения сжатия изображений.

Докажем теперь, что выполняется неравенство (4).

Для этого рассмотрим самый худший случай: число одинаковых элементов в сериях равно единице , а установленная ранее максимально возможная длина серии $\ell_{max}$ превышает максимально возможное значение параметра визуализации **B**, т.е.

$$\begin{cases} \ell_{ij} = 1, \; i = \overline{1, m_{\text{дс}}} , \; j = \overline{1, n_{\text{дс}}} ; \\ \ell_{max} > B . \end{cases} \qquad (9)$$

Это соответствует случаю самого неточного выбора значения $\ell_{max}$. Поскольку все $\ell_{ij} = 1$, то количество элементов в массиве длин серий будет равно количеству элементов изображения в исходном фрагменте

$$m_{дс}\, n_{дс} = n_{стр}\, \nu_{стр} \ . \qquad (10)$$

Запишем выражения для вычисления полиадических чисел с учетом условия (9):

$$N_j = \sum_{i=1}^{m_{дс}} h_i \ ; \ \ h_i = \prod_{\xi=i+1}^{m_{дс}} \left( \max_{1 \le j \le n_{дс}} \left\{ \ell_{\xi j} \right\} + 1 \right) .$$

Но поскольку $\ell_{ij} = 1$, то $\max\limits_{1 \le j \le n_{дс}} \left\{ \ell_{\xi j} \right\} = 1 \ , \ \xi = \overline{1, m_{дс}}$. Отсюда следует,

что $h_i = \prod\limits_{\xi=i+1}^{m_{дс}} \left( \max\limits_{1 \le j \le n_{дс}} \left\{ \ell_{\xi j} \right\} + 1 \right) = 2^{m_{дс} - i}$, а

$$N_j = \sum_{i=1}^{m_{дс}} 2^{m_{дс} - i} \ . \qquad (11)$$

Причем правая часть выражения (11) ограничена сверху [1]:

$$\sum_{i=1}^{m_{дс}} 2^{m_{дс} - i} < 2^{m_{дс}} \ . \qquad (12)$$

Тогда размерность плавающего пространства полиадических чисел также будет иметь ограничение сверху, равное

$$\left| R_{пл} \right| = \sum_{j=1}^{n_{дс}} \log_2 N_j < n_{дс} \log_2 2^{m_{дс}} = n_{дс}\, m_{дс} \ .$$

Однако, по условию примера количество элементов в массиве длин серий равно количеству элементов в фрагменте изображения. Следовательно, будет выполняться неравенство

$$\left| R_{пл} \right| < n_{дс}\, m_{дс} = n_{стр}\, \nu_{стр} < n_{стр}\, \nu_{стр} \log_2 B = \left| R_f \right| . \qquad (13)$$

Из анализа неравенства (13) следует:

1. Размерность плавающего пространства полиадических чисел длин серий будет меньше размерности пространства исходного фрагмента изображения.

2. Величина размерности $\left| R_{пл} \right|$ (для предложенной организации массивов длин серий) не зависит от выбранного значения максимально возможной длины серии $\ell_{max}$.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Разработано сжимающее отображение на основе полиадического кодирования массивов длин серий. Это отображение сокращает размерность пространства исходного изображения за счет:

- уменьшения структурной избыточности в результате выявления длин серий;

- представления нескольких кодов длин серий одним полиадическим кодом меньшей длины за счет снижения структурной избыточности, обусловленной различной степенью насыщенности изображений мелкими деталями.

2. Доказано, что полиадические числа компенсируют неточность выбора максимального значения длин серий $\ell_{\mathbf{max}}$, что объясняется оперированием не с кодами длин серий, а с абсолютными значениями длин серий.

3. При полиадическом кодировании массивов длин серий сжатие будет тем больше, чем меньше разница между количеством разрядов, затрачиваемых на кодовое представление полиадического числа $\mathbf{N_j}$ и длиной машинного слова **M**.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Баранник В.В., Королёва Н.А. Организация массивов длин серий для полиадического кодирования // ИУСЖТ. – 2001. – №4. – С. 20 - 23.

2. Королёва Н.А. Оценка эффективности обработки видеоинформации методом длин серий // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 1999. – Вип. 2(6). – С. 181 - 185.

3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – 790 с.


*Поступила в редколлегию 10.07.2001*