

СТРУКТУРА КВАЗИЭКВИДИСТАНТНОГО ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.А. Ганенко, к.ф.-м.н. Т.В. Емельянова, д.ф.-м.н. С.С. Недорезов, проф. В.Е. Пустоваров

Дальнейшее совершенствование методов стабилизации частоты кварцевых резонаторов взаимосвязано с точным определением частот собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов [1]. Особое внимание уделяется получению резонаторов с оптимальными характеристиками. В этой связи представляет интерес детальная структура частотного спектра, в том числе и квазиэквидистантного спектра.

В рамках линейной пьезоэлектрической теории [2] было получено уравнение, описывающее собственные колебания выпуклых резонаторов

$$\begin{aligned}
 & (\nu_m - \rho_m \omega^2) \cdot A_m + \hat{L}_{mm} A_m + \\
 & + \sum_{n' \neq m} \frac{\hat{L}_{mn'} \hat{L}_{n'm}}{\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'}} A_m + \sum_{\substack{n' \neq m \\ n'' \neq m}} \left(\frac{\hat{L}_{mn'} \hat{L}_{n'n''} \hat{L}_{n''m}}{(\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'}) (\rho_{n''} \omega^2 - \nu_{n''})} \right) + \dots = 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $\frac{\nu_m}{\rho_m} = \omega_m$ - частота невозмущенной основной моды A_m .

Оператор $\hat{L}_{mn'}$, равный

$$\begin{aligned}
 \hat{L}_{mn'} = & -b_{\alpha\beta}^{mn'} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_\alpha \partial \tilde{x}_\beta} + \left(a_{\alpha}^{mn'} - a_{\alpha}^{n'm} + \frac{1}{R} g_{\alpha\beta}^{mn'} \tilde{x}_\beta \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\alpha} + \\
 & + \frac{1}{R} \left(g_{\alpha\alpha}^{mn'} - d_{\alpha}^{mn'} \tilde{x}_\alpha - \frac{1}{R} f_{\alpha\beta}^{mn'} \tilde{x}_\alpha \tilde{x}_\beta \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

учитывает анизотропию и толщину пьезоэлектрика с радиусом кривизны R .

Оператор $\hat{L}_{mn'}$ с $m \neq n'$ описывает взаимодействие основной моды (m) с другими модами (n') системы.

Была предложена [3] модель частотного спектра колебаний, соответствующая уравнению (1):

$$\omega_{k/m}^2 = \sum_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta m} k^{\alpha} l^{\beta}; \quad \Omega_{\alpha\beta m} = \frac{1}{(\sqrt{R})^{\alpha+\beta}} \sum_{p=0}^{\infty} \Omega_{\alpha\beta m}^{(p)} \frac{1}{(\sqrt{R})^p}. \quad (3)$$

Такая модель является неэквидистантной по квадрату частоты. Квазиэквидистантный частотный спектр описывается выражением

$$\omega_{k/m}^2 = \Omega_{00m} + \Omega_{10m}k + \Omega_{01m}l + \Omega_{20m}k^2 + \Omega_{11m}kl + \Omega_{02m}l^2. \quad (4)$$

Постоянные Ω_{00m} , Ω_{10m} , Ω_{01m} , Ω_{20m} , Ω_{02m} , Ω_{11m} обусловлены оператором $\hat{\mathbf{L}}_{mn'}$. Проанализируем их структуру. В уравнение (1) введем новые переменные $x_\alpha = \tilde{x}_\alpha \mathbf{R}^{-1/4}$, $x_\beta = \tilde{x}_\beta \mathbf{R}^{-1/4}$, $x_\gamma = \tilde{x}_\gamma \mathbf{R}^{-1/4}$, ..., соответствующие «изменению масштаба». Они позволяют записать уравнение (1) в виде разложения по малому параметру $1/\mathbf{R}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm}}{\rho_m \nu_{n'} - \rho_{n'} \nu_m}. \text{ Тогда} \\ & - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{R}}} \left(\frac{b_{\alpha\beta}^{mm}}{\rho_m} + \sum_{n' \neq m} \Theta (a_\beta^{n'm} - a_\beta^{mn'}) \right) \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{\sqrt{\mathbf{R}}} x_\alpha^2 \right) A_m + \\ & \quad + \frac{1}{\mathbf{R}^{3/4}} \left(-d_\alpha^{mm} \frac{x_\alpha}{\rho_m} A_m + \sum_{n' \neq m} \Theta [b_{\gamma\beta}^{mn'} - b_{\gamma\beta}^{n'm} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n'' \neq m} \frac{\rho_m (a_\gamma^{n'n''} - a_\gamma^{n''n'}) (a_\beta^{n''m} - a_\beta^{mn''})}{\rho_m \nu_{n''} - \rho_{n''} \nu_m} \right] \frac{\partial^3 A_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \Bigg) + \\ & \quad + \frac{1}{\mathbf{R}} \left\{ \frac{g_{\alpha\alpha}^{mm} A_m}{\rho_m} + \sum_{n' \neq m} \Theta \left(d_\alpha^{n'm} A_m + d_\gamma^{mn'} x_\gamma \frac{\partial A_m}{\partial x_\alpha} - d_\gamma^{n'm} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (x_\gamma A_m) \right) \right\} + \\ & \quad + \left(\sum_{n' \neq m} \frac{b_{\alpha\beta}^{mn'} \cdot b_{\gamma\delta}^{n'm}}{\rho_m \cdot \nu_{n'} - \rho_{n'} \cdot \nu_m} - \sum_{n'' \neq m} \frac{\Theta \cdot \rho_m}{\rho_m \nu_{n''} - \rho_{n''} \nu_m} \left[(a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm}) (a_\gamma^{n''m} - a_\gamma^{mn''}) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times (b_{\beta\delta}^{n'n''} - b_{\beta\delta}^{n''n'}) - b_{\alpha\beta}^{mn'} (a_\delta^{n'n''} - a_\delta^{n''n'}) (a_\gamma^{n''m} - a_\gamma^{mn''}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{\substack{n' \neq m \\ n'' \neq m \\ n''' \neq m}} \Theta \frac{\rho_m^2 (a_\beta^{n'n''} - a_\beta^{n''n'}) (a_\delta^{n''n'''} - a_\delta^{n''n''}) (a_\gamma^{n''m} - a_\gamma^{mn''})}{(\rho_m \nu_{n''} - \rho_{n''} \nu_m) (\rho_m \nu_{n'''} - \rho_{n'''} \nu_m)} \right] \right\} \times \\ & \quad \times \frac{\partial^4 A_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma \partial x_\delta} + \frac{1}{\mathbf{R}^{5/4}} \{ \dots \} + \frac{1}{\mathbf{R}^{6/4}} \{ \dots \} + \dots = \omega^2 A_m. \end{aligned} \quad (5)$$

В системе координат, оси (x, y) которой совпадают с собственными осями (d_1, d_2) тензора $d_{\alpha\beta}$:

$$d_{\alpha\beta} = \frac{b_{\alpha\beta}^{mn}}{\rho_m} + \sum_{n' \neq m} \frac{(a_{\alpha}^{mn'} - a_{\alpha}^{n'm})(a_{\beta}^{n'm} - a_{\beta}^{mn'})}{\rho_m v_{n'} - \rho_{n'} v_m} \quad (6)$$

уравнение (3) удобно представить в виде

$$-\frac{d_1}{\sqrt{R}} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} - \frac{d_2}{\sqrt{R}} \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{\sqrt{R}} (x^2 + y^2) \right) A_m + W A_m = (\omega^2 + \Delta) A_m. \quad (7)$$

Слагаемое $W A_m$ содержит члены уравнения, порядок которых меньше $1/\sqrt{R}$, а именно

$$W A_m = \frac{C A_m}{R^{3/4}} + \frac{B A_m}{R} + \frac{E A_m}{R^{5/4}} + \frac{D A_m}{R^{3/2}} + \dots, \quad (8)$$

где $C A_m, B A_m, \dots$ - коэффициенты при соответствующих степенях $1/R$ в уравнении (5).

Оператор возмущения W вносит поправку Δ в частотный спектр

$$\omega_{k/m}^{2(0)} = \omega^2 + \sqrt{\frac{c d_1}{R}} (2l+1) + \sqrt{\frac{c d_2}{R}} (2k+1) \quad (9)$$

невозмущенной задачи

$$-d_1 \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} - d_2 \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{R} (x^2 + y^2) \right) A_m = \omega^2 A_m. \quad (10)$$

Матричные элементы $W_{k/m, k'/m}$ оператора W равны

$$W_{k/m, k'/m} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{k/m} W \Psi_{k'/m} dx dy, \quad (11)$$

где $\Psi_{k/m}(x, y)$ - собственные функции основного приближения, когда

$$A_m^{(0)} = \Psi_{k/m}; \quad \Psi_{k/m}(x, y) \equiv \Psi_l(x) \Psi_k(y);$$

$$\Psi_l(x) = \frac{2^{-1/2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{l!}} \left(\frac{c}{R d_1} \right)^{1/4} e^{-x^2 / \sqrt{4 R d_1 / c}} H_l \left(x \sqrt{\frac{c}{R d_1}} \right);$$

$H_l(x)$ - функция Эрмита.

Анализ матричных элементов $W_{k/m, k'/m}$ оператора W показывает, что диагональные матричные элементы обусловлены слагаемыми с малым параметром $1/\sqrt{R} \frac{1+n}{2}$.

Решая уравнение (7) по теории возмущений, получаем поправку $\Delta_{k/m}$ в виде разложения по малому параметру $1/\sqrt{R}$:

$$\Delta_{k/m} = \frac{1}{R} (\delta_{C_{k/m}} + \delta_{B_{k/m}}) + \frac{1}{R^{3/2}} (\delta_{D_{k/m}} + \dots) + \frac{1}{R^2} (\dots) + \dots, \quad (12)$$

$$\delta_c = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k' \neq k \\ l' \neq l}} \frac{|c_{k/m, k'/m}|^2}{\sqrt{cd_1} (l-l') + \sqrt{cd_2} (k-k')}, \quad \delta_B = B_{k/m, k/m}; \quad \delta_D = D_{k/m, k/m}; \quad (13)$$

Вычисление матричных элементов оператора W приводит к таким зависимостям:

$$\begin{aligned} \delta_{c_{k/m}} &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + \beta \leq 2}} \delta_{C(m)}^{\alpha\beta} k^{\alpha} l^{\beta}; \\ \delta_{B_{k/m}} &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + \beta \leq 2}} \delta_{B(m)}^{\alpha\beta} k^{\alpha} l^{\beta}; \\ \delta_{D_{k/m}} &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + \beta \leq 3}} \delta_{D(m)}^{\alpha\beta} k^{\alpha} l^{\beta} \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Нас интересует структура квазиэквидистантного спектра, когда $\alpha + \beta \leq 2$. В таком случае поправка $\Delta_{k/m}$ имеет вид

$$\Delta_{k/m} = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + \beta \leq 2}} \left\{ \frac{\delta_{C(m)}^{\alpha\beta} + \delta_{B(m)}^{\alpha\beta}}{R} + \frac{\delta_{D(m)}^{\alpha\beta} + \dots}{R^{3/2}} + \dots \right\} k^{\alpha} l^{\beta}. \quad (15)$$

Соответствующий частотный спектр $\omega_{k/m}$ определяется формулой (4), в которой:

$$\begin{aligned} \Omega_{00m} &= \omega_{mm}^2 + \frac{1}{\sqrt{R}} (\sqrt{cd_1} + \sqrt{cd_2}) + \frac{1}{R} (\delta_{C(m)}^{00} + \delta_{B(m)}^{00}) + \frac{1}{R^{3/2}} (\delta_{D(m)}^{00} + \dots) + \dots; \\ \Omega_{10m} &= \frac{1}{\sqrt{R}} 2\sqrt{cd_2} + \frac{1}{R} (\delta_{C(m)}^{10} + \delta_{B(m)}^{10}) + \frac{1}{R^{3/2}} (\delta_{D(m)}^{10} + \dots) + \dots; \end{aligned}$$

$$\Omega_{01m} = \frac{1}{\sqrt{R}} 2\sqrt{cd_1} + \frac{1}{R} (\delta_{C(m)}^{01} + \delta_{B(m)}^{01}) + \frac{1}{R^{3/2}} (\delta_{D(m)}^{01} + \dots) + \dots; \quad (16)$$

$$\Omega_{11m} = \frac{1}{R} (\delta_{C(m)}^{11} + \delta_{B(m)}^{11}) + \frac{1}{R^{3/2}} (\delta_{D(m)}^{11} + \dots) + \dots;$$

$$\Omega_{20m} = \frac{1}{R} (\delta_{C(m)}^{20} + \delta_{B(m)}^{20}) + \frac{1}{R^{3/2}} (\delta_{D(m)}^{20} + \dots) + \dots;$$

$$\Omega_{02m} = \frac{1}{R} (\delta_{C(m)}^{02} + \delta_{B(m)}^{02}) + \frac{1}{R^{3/2}} (\delta_{D(m)}^{02} + \dots) + \dots$$

Частотный спектр ω_{km} (4), коэффициенты которого определены формулами (16), получен в предположении о взаимодействии основной моды A_m с другими модами системы. За счет изменения частоты основной моды изменяются частоты ω_{km} , близкие основной частоте, т.е. происходит перестройка частотного спектра ω_{km} моды m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Shmaliy Yu.S. The modulational method of quartz crystal oscillator frequency stabilization // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. – 1998. – Vol. 45, № 6. – P.1476 - 1484.
2. Nedorezov S.S., Ganenko E.A. Frequency spectrum of the piezoelectric resonators // Dopovidi NAN Ukraine. – 1996. – №10. – P.31-35. (in Ukrainian), Proc. of the Int. Symp. on AFSG (Moscow-St. Petersburg). – 1998. – P. 89 - 92.
3. Недорезов С.С. Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов // Известия вузов СССР. Радиофизика. – 1990. – №12. – С. 1417 - 1422.
4. Ганенко Е.А., Емельянова Т.В., Недорезов С.С., Шмалий Ю.С. Локализованные колебания анизотропных пьезоэлектрических резонаторов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 1999. – Вип. 1(5). – С. 104 - 110.
6. Недорезов С.С., Ганенко Е.А., Емельянова Т.В., Шмалий Ю.С., Вейсс К., Пустоваров В.Е. Влияние границы электрода на собственные колебания пьезоэлектрических резонаторов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип. 3(9). – С. 157 - 162.

Поступила в редколлегию 31.08.2001