УДК 521.372.412:537.226.86

# СТРУКТУРА КВАЗИЭКВИДИСТАНТНОГО ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.А. Ганенко, к.ф.-м.н. Т.В. Емельянова, д.ф.-м.н. С.С. Недорезов, проф. В.Е. Пустоваров

Дальнейшее совершенствование методов стабилизации частоты кварцевых резонаторов взаимосвязано с точным определением частот собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов [1]. Особое внимание уделяется получению резонаторов с оптимальными характеристиками. В этой связи представляет интерес детальная структура частотного спектра, в том числе и квазиэквидистантного спектра.

В рамках линейной пьезоэлектрической теории [2] было получено уравнение, описывающее собственные колебания выпуклых резонаторов

$$\left(\nu_m - \rho_m\omega^2\right)\cdot A_m + \widehat{L}_{mm} A_m + \\ + \sum_{n'\neq m} \frac{\widehat{L}_{mn'}\widehat{L}_{n'm}}{\rho_{n'}\omega^2 - \nu_{n'}^2} A_m + \sum_{\substack{n'\neq m\\ n''\neq m}} \frac{\widehat{L}_{mn'}\widehat{L}_{n'n''}\widehat{L}_{n''m}}{\left(\rho_{n'}\omega^2 - \nu_{n'}^2\right)\cdot\left(\rho_{n''}\omega^2 - \nu_{n''}^2\right)} + \ldots = 0, \qquad (1)$$

где $\dfrac{\nu_m}{\rho_m} = \omega_m$ - частота невозмущенной основной моды $A_m$.

Оператор $\widehat{L}_{mn'}$, равный

$$\widehat{L}_{mn'} = -b_{\alpha\beta}^{mn'} \frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_\alpha \partial\tilde{x}_\beta} + \left(a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm} + \frac{1}{R} g_{\alpha\beta}^{mn'} \tilde{x}_\beta\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_\alpha} + \\ + \frac{1}{R}\left(g_{\alpha\alpha}^{mn'} - d_\alpha^{mn'}\tilde{x}_\alpha - \frac{1}{R} f_{\alpha\beta}^{mn'}\tilde{x}_\alpha\tilde{x}_\beta\right) \qquad (2)$$

учитывает анизотропию и толщину пьезоэлектрика с радиусом кривизны **R**.

Оператор $\widehat{L}_{mn'}$ с $m \neq n'$ описывает взаимодействие основной моды $(m)$ с другими модами $(n')$ системы.

Была предложена [3] модель частотного спектра колебаний, соответствующая уравнению (1):

$$\omega_{klm}^2 = \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha\beta m} k^\alpha l^\beta ; \qquad \Omega_{\alpha\beta m} = \frac{1}{\left(\sqrt{R}\right)^{\alpha+\beta}} \sum_{p=0}^{\infty} \Omega_{\alpha\beta m}^{(p)} \frac{1}{\left(\sqrt{R}\right)^p} . \qquad (3)$$

Такая модель является неэквидистантной по квадрату частоты.

Квазиэквидистантный частотный спектр описывается выражением

$$\omega_{klm}^2 = \Omega_{00m} + \Omega_{10m}k + \Omega_{01m}l + \Omega_{20m}k^2 + \Omega_{11m}kl + \Omega_{02m}l^2 . \qquad (4)$$

Постоянные $\Omega_{00m}$, $\Omega_{10m}$, $\Omega_{01m}$, $\Omega_{20m}$, $\Omega_{02m}$, $\Omega_{11m}$ обусловлены оператором $\widehat{L}_{mn'}$. Проанализируем их структуру. В уравнение (1) введем новые переменные $x_\alpha = \tilde{x}_\alpha R^{-1/4}$, $x_\beta = \tilde{x}_\beta R^{-1/4}$, $x_\gamma = \tilde{x}_\gamma R^{-1/4}$, ..., соответствующие «изменению масштаба». Они позволяют записать уравнение (1) в виде разложения по малому параметру $1/R$. Обозначим $\Theta = \dfrac{a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm}}{\rho_m \nu_{n'} - \rho_{n'}\nu_m}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\frac{b_{\alpha\beta}^{mm}}{\rho_m} + \sum_{n'\neq m}\Theta\left(a_\beta^{n'm} - a_\beta^{mn'}\right)\right)\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{\sqrt{R}}x_\alpha^2\right)A_m + \\
&+\frac{1}{R^{3/4}}\left(-d_\alpha^{mm}\frac{x_\alpha}{\rho_m}A_m + \sum_{n'\neq m}\Theta\left[b_{\gamma\beta}^{mn'} - b_{\gamma\beta}^{n'm} + \right.\right.\\
&\left.\left.+\sum_{n''\neq m}\frac{\rho_m\left(a_\gamma^{n'n''} - a_\gamma^{n''n'}\right)\left(a_\beta^{n''m} - a_\beta^{mn''}\right)}{\rho_m\nu_{n''} - \rho_{n''}\nu_m}\right]\frac{\partial^3 A_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\right) + \\
&+\frac{1}{R}\left\{\frac{g_{\alpha\alpha}^{mm}A_m}{\rho_m} + \sum_{n'\neq m}\Theta\left(d_\alpha^{n'm}A_m + d_\gamma^{mn'}x_\gamma\frac{\partial A_m}{\partial x_\alpha} - d_\gamma^{n'm}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(x_\gamma A_m\right)\right) + \right.\\
&+\left(\sum_{n'\neq m}\frac{b_{\alpha\beta}^{mn'}\cdot b_{\gamma\delta}^{n'm}}{\rho_m\cdot\nu_{n'} - \rho_{n'}\cdot\nu_m} - \sum_{n''\neq m}\frac{\Theta\cdot\rho_m}{\rho_m\nu_{n''} - \rho_{n''}\nu_m}\left[\left(a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm}\right)\left(a_\gamma^{n''m} - a_\gamma^{mn''}\right)\times\right.\right.\\
&\times\left(b_{\beta\delta}^{n'n''} - b_{\beta\delta}^{n''n'}\right) - b_{\alpha\beta}^{mn'}\left(a_\delta^{n'n''} - a_\delta^{n''n'}\right)\left(a_\gamma^{n''m} - a_\gamma^{mn''}\right) + \\
&\left.\left.\left.+\sum_{\substack{n'\neq m\\ n''\neq m\\ n'''\neq m}}\Theta\frac{\rho_m^2\left(a_\beta^{n'n''} - a_\beta^{n''n'}\right)\left(a_\delta^{n''n'''} - a_\delta^{n'''n''}\right)\left(a_\gamma^{n'''m} - a_\gamma^{mn'''}\right)}{\left(\rho_m\nu_{n''} - \rho_{n''}\nu_m\right)\left(\rho_m\nu_{n'''} - \rho_{n'''}\nu_m\right)}\right]\right)\right\}\times \\
&\times\frac{\partial^4 A_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma \partial x_\delta} + \frac{1}{R^{5/4}}\{\ldots\} + \frac{1}{R^{6/4}}\{\ldots\} + \ldots = \omega^2 A_m .
\end{aligned} \qquad (5)$$

В системе координат, оси **(x, y)** которой совпадают с собственными осями ( $\mathbf{d_1, d_2}$ ) тензора $\mathbf{d_{\alpha\beta}}$ :

$$\mathbf{d_{\alpha\beta}} = \frac{\mathbf{b_{\alpha\beta}^{mn}}}{\boldsymbol{\rho}_\mathbf{m}} + \sum_{\mathbf{n'\neq m}} \frac{\left(\mathbf{a_\alpha^{mn'}} - \mathbf{a_\alpha^{n'm}}\right)\left(\mathbf{a_\beta^{n'm}} - \mathbf{a_\beta^{mn'}}\right)}{\boldsymbol{\rho}_\mathbf{m}\boldsymbol{\nu}_\mathbf{n'} - \boldsymbol{\rho}_\mathbf{n'}\boldsymbol{\nu}_\mathbf{m}} \tag{6}$$

уравнение (3) удобно представить в виде

$$-\frac{d_1}{\sqrt{R}}\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} - \frac{d_2}{\sqrt{R}}\frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{\sqrt{R}}\left(x^2 + y^2\right)\right)A_m + WA_m = \\ = \left(\omega^2 + \Delta\right)A_m. \tag{7}$$

Слагаемое $\mathbf{WA_m}$ содержит члены уравнения, порядок которых меньше $1/\sqrt{R}$ , а именно

$$WA_m = \frac{CA_m}{R^{3/4}} + \frac{BA_m}{R} + \frac{EA_m}{R^{5/4}} + \frac{DA_m}{R^{3/2}} + \ldots, \tag{8}$$

где $\mathbf{CA_m}$ , $\mathbf{BA_m}$ , … - коэффициенты при соответствующих степенях $1/R$ в уравнении (5).

Оператор возмущения $\mathbf{W}$ вносит поправку $\Delta$ в частотный спектр

$$\omega_{kl m}^{2(0)} = \omega^2 + \sqrt{\frac{cd_1}{R}}\left(2l+1\right) + \sqrt{\frac{cd_2}{R}}\left(2k+1\right) \tag{9}$$

невозмущенной задачи

$$-d_1\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} - d_2\frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{R}\left(x^2 + y^2\right)\right)A_m = \omega^2 A_m\,. \tag{10}$$

Матричные элементы $\mathbf{W_{klm,k'l'm}}$ оператора $\mathbf{W}$ равны

$$W_{klm,k'l'm} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{klm} W \Psi_{k'l'm}\, dx\, dy, \tag{11}$$

где $\mathbf{\Psi_{klm}(x,y)}$ - собственные функции основного приближения, когда $A_m^{(0)} = \Psi_{klm}$ ; $\quad \Psi_{klm}(x,y) \equiv \Psi_l(x)\Psi_k(y)$ ;

$$\Psi_l(x) = \frac{2^{-1/2}}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{l!}}\left(\frac{c}{Rd_1}\right)^{1/4} e^{\frac{-x^2}{\sqrt{4Rd_1/c}}} H_l\left(x\sqrt[4]{\frac{c}{Rd_1}}\right);$$

$\mathbf{H_l(x)}$ - функция Эрмита.

Анализ матричных элементов $\mathbf{W}_{\mathbf{k}l\mathbf{m},\mathbf{k}'l'\mathbf{m}}$ оператора $\mathbf{W}$ показывает, что диагональные матричные элементы обусловлены слагаемыми с малым параметром $\mathbf{1}\Big/\mathbf{R}^{\frac{\mathbf{1+n}}{\mathbf{2}}}$.

Решая уравнение (7) по теории возмущений, получаем поправку $\Delta_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}$ в виде разложения по малому параметру $\mathbf{1}/\mathbf{R}$:

$$\Delta_{\mathbf{k}l\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}}\left(\delta_{\mathbf{C}_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}} + \delta_{\mathbf{B}_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{3/2}}\left(\delta_{\mathbf{D}_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}} + \ldots\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{2}}(\ldots) + \ldots, \tag{12}$$

$$\delta_{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\substack{\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}\\ l'\neq l}} \frac{\left|\mathbf{c}_{\mathbf{k}l\mathbf{m},\mathbf{k}'l'\mathbf{m}}\right|^{2}}{\sqrt{\mathbf{cd}_{1}}\left(l-l'\right)+\sqrt{\mathbf{cd}_{2}}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)},\ \delta_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_{\mathbf{k}l\mathbf{m},\mathbf{k}l\mathbf{m}};\ \delta_{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{\mathbf{k}l\mathbf{m},\mathbf{k}l\mathbf{m}}; \tag{13}$$

Вычисление матричных элементов оператора $\mathbf{W}$ приводит к таким зависимостям:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{c}_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha+\beta\le 2}} \delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{C(m)}}\mathbf{k}^{\alpha} l^{\beta};\\
\delta_{\mathbf{B}_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha+\beta\le 2}} \delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{B(m)}}\mathbf{k}^{\alpha} l^{\beta};\\
\delta_{\mathbf{D}_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha+\beta\le 3}} \delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{D(m)}}\mathbf{k}^{\alpha} l^{\beta} \quad \ldots .
\end{aligned} \tag{14}$$

Нас интересует структура квазиэквидистантного спектра, когда $\alpha+\beta\le \mathbf{2}$. В таком случае поправка $\Delta_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}$ имеет вид

$$\Delta_{\mathbf{k}l\mathbf{m}} = \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha+\beta\le 2}} \left\{\frac{\delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{C(m)}} + \delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{B(m)}}}{\mathbf{R}} + \frac{\delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{D(m)}} + \ldots}{\mathbf{R}^{3/2}} + \ldots\right\}\mathbf{k}^{\alpha} l^{\beta}. \tag{15}$$

Соответствующий частотный спектр $\omega_{\mathbf{k}l\mathbf{m}}$ определяется формулой (4), в которой:

$$\Omega_{\mathbf{00m}} = \omega^{2}_{\mathbf{mm}} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{R}}}\left(\sqrt{\mathbf{cd}_{1}} + \sqrt{\mathbf{cd}_{2}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}}\left(\delta^{\mathbf{00}}_{\mathbf{C(m)}} + \delta^{\mathbf{00}}_{\mathbf{B(m)}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{3/2}}\left(\delta^{\mathbf{00}}_{\mathbf{D(m)}} + \ldots\right) + \ldots;$$

$$\Omega_{\mathbf{10m}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{R}}}\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{cd}_{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}}\left(\delta^{\mathbf{10}}_{\mathbf{C(m)}} + \delta^{\mathbf{10}}_{\mathbf{B(m)}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{3/2}}\left(\delta^{\mathbf{10}}_{\mathbf{D(m)}} + \ldots\right) + \ldots;$$

$$\Omega_{01m} = \frac{1}{\sqrt{R}} 2\sqrt{cd_1} + \frac{1}{R}\left(\delta^{01}_{C(m)} + \delta^{01}_{B(m)}\right) + \frac{1}{R^{3/2}}\left(\delta^{01}_{D(m)} + \ldots\right) + \ldots; \quad (16)$$

$$\Omega_{11m} = \frac{1}{R}\left(\delta^{11}_{C(m)} + \delta^{11}_{B(m)}\right) + \frac{1}{R^{3/2}}\left(\delta^{11}_{D(m)} + \ldots\right) + \ldots;$$

$$\Omega_{20m} = \frac{1}{R}\left(\delta^{20}_{C(m)} + \delta^{20}_{B(m)}\right) + \frac{1}{R^{3/2}}\left(\delta^{20}_{D(m)} + \ldots\right) + \ldots;$$

$$\Omega_{02m} = \frac{1}{R}\left(\delta^{02}_{C(m)} + \delta^{02}_{B(m)}\right) + \frac{1}{R^{3/2}}\left(\delta^{02}_{D(m)} + \ldots\right) + \ldots.$$

Частотный спектр $\omega_{klm}$ (4), коэффициенты которого определены формулами (16), получен в предположении о взаимодействии основной моды $A_m$ с другими модами системы. За счет изменения частоты основной моды изменяются частоты $\omega_{klm}$, близкие основной частоте, т.е происходит перестройка частотного спектра $\omega_{klm}$ моды $m$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Shmaliy Yu.S. The modulational method of quartz crystal oscillator frequency stabilization // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. – 1998. – Vol. 45, № 6. – P.1476 - 1484.

2. Nedorezov S.S., Ganenko E.A. Frequency spectrum of the piezoelectric resonators // Dopovidi NAN Ukraine. – 1996. – №10. –- P.31-35. (in Ukrainian), Proc. of the Int. Symp. on AFSG (Moscow-St. Peterburg). – 1998. – P. 89 - 92.

3. Недорезов С.С. Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов // Известия вузов СССР. Радиофизика. – 1990. – №12. – С. 1417 - 1422.

4. Ганенко Е.А., Емельянова Т.В., Недорезов С.С., Шмалий Ю.С. Локализованные колебания анизотропных пьезоэлектрических резонаторов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 1999. – Вип. 1(5). – С. 104 - 110.

6. Недорезов С.С., Ганенко Е.А., Емельянова Т.В., Шмалий Ю.С., Вейсс К., Пустоваров В.Е. Влияние границы электрода на собственные колебания пьезоэлектрических резонаторов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип. 3(9). – С. 157 - 162.


*Поступила в редколлегию 31.08.2001*