

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ФІЛЬТРА ДЛЯ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

І.Г. Лисаченко

(подав д.т.н., проф. Л.Ф. Купченко)

Задача точного визначення навігаційних параметрів руху літаючих об'єктів в умовах її маневрування є не до кінця вирішеною. Пропонується кінематичний алгоритм екстраполяції на основі використання фільтра Калмана. Наведена структурна схема фільтра, що реалізує запропонований алгоритм.

Для забезпечення безперервного супроводу об'єктів, траєкторії яких підлягають коректуванню за малий термін часу, слід як можна точніше і на довший період наперед визначити навігаційні параметри їх руху. Як відомо [1, 2], для активного супроводу об'єкта можуть бути використані два можливі алгоритми екстраполяції - динамічний або кінематичний. В якості алгоритму супроводу виберемо кінематичний. При цьому проекція траєкторії об'єкта на одну вісь прямокутної системи координат апроксимується поліномом

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_k t^k, \quad (1)$$

де коефіцієнти α_k - параметри траєкторії, пропорційні похідним порядку k координати λ .

Оцінка екстрапольованого значення координати λ в момент часу t_{m+1} , яка одержана методом найменших квадратів, визначається співвідношенням

$$\hat{\lambda}(t_{m+1}) = \sum_{i=1}^m G_i x(t_i), \quad (2)$$

де G_i - коефіцієнти вагомості, які визначаються з матричного рівняння.

Даний алгоритм спроможний забезпечити супровід об'єкта при "плавній" траєкторії його руху. Проте в даному випадку управління рухом за програмною траєкторією потребує врахування не тільки можливого, але й навпаки передбаченого маневру об'єкта. При цьому рівняння стану об'єкта, що маневрує, має вигляд [5]:

$$\bar{\lambda}_n = \underline{G}_n \bar{\lambda}_{n-1} + \underline{\Gamma}_n \bar{g}_n + \underline{P}_n \bar{\eta}_n, \quad (3)$$

де $\underline{G}_n \bar{\lambda}_{n-1}$ - рівняння необуреної траєкторії (поліном першого ступеню);

\bar{g}_n - вектор обурень параметрів траєкторії; $\bar{\eta}_n$ - вектор обурень, зумовлених впливом зовнішнього середовища і неточності управління (шумів управління); Γ_n, P_n - відомі матриці.

При такому розгляданні можливий такий підхід до побудови алгоритму інтерполяції [3, 4], при якому на кожному інтервалі оновлення інформації необхідно мати дані про математичне сподівання інтенсивності маневру, і сам процес екстраполяції реалізується за допомогою адаптивного рекурентного фільтра.

У цьому ракурсі розглянемо задачу синтезу фільтра, який буде забезпечувати виконання визначеної задачі з найкращою якістю. Як показали дослідження багатьох авторів [5-7], найбільш прийнятний шлях управління процесом вимірювання - супроводження заснований на використуванні апарату адаптивної калмановської фільтрації. Як доведено в [8-10], фільтр Калмана не можна безпосередньо застосовувати, якщо динамічна система, стан якої має бути оціненим, зміщує невизначені елементи.

Враховуючи модель стану (3) в реальних системах управління, слід розглядати іншу модель зазначеного фільтра. Крім того, при здійсненні маневру об'єкт зазнає одночасно діяння різних сил, що призводить до його руху, як за плавними траєкторіями, так і за швидкозмінними (рис. 1).

В цій ситуації фільтрований процес уявляє з себе суму двох процесів поліноміального та певного швидкозмінного процесу. З урахуванням зроблених зауважень розглянемо в якості основного варіанту модель, коли траєкторія апроксимується сумою [1, 4]:

$$y(t) = x(t) + \lambda(t) + n(t), \quad (4)$$

де $x(t)$ і $\lambda(t)$ - фільтровані процеси; $n(t)$ - складові шумів з параметрами: $\langle n(t) \rangle = 0$, $\langle n(t)n(\tau) \rangle = 0,5N_0\delta(t-\tau)$, де $\delta(t-\tau)$ - дельта-функція.

Отже, нехай:

$$x(t) = \sum_{k=1}^2 x_k t^k; \quad (5)$$

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t). \quad (6)$$

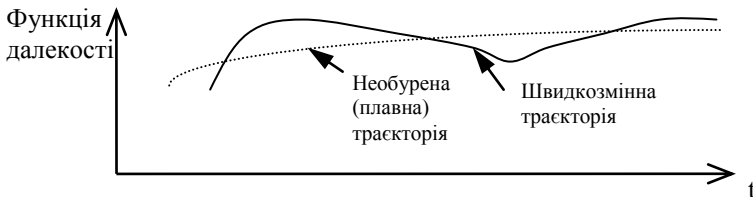


Рис.1. Траєкторія руху об'єкта

Розіб'ємо задачу визначення траєкторії на дві часткових:

- фільтрацію процесу $\mathbf{x}(t)$;
- фільтрацію процесів λ_1 і λ_2 .

У випадку фільтрації $\mathbf{x}(t)$ компонентами вектору стану є координата, швидкість та прискорення, тобто

$$\bar{\mathbf{x}}^T(\mathbf{m}, \mathbf{m}) = [\mathbf{x}(t_{\mathbf{m}}), \dot{\mathbf{x}}(t_{\mathbf{m}}), \ddot{\mathbf{x}}(t_{\mathbf{m}})]. \quad (7)$$

Екстраполяція вектору стану здійснюється у відповідності із співвідношенням

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{m} + 1, \mathbf{m}) = \underline{\Phi} \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{m}, \mathbf{m}), \quad (8)$$

де $\underline{\Phi}$ - матриця переходів стану об'єкта.

За результатами вимірювань координат об'єкта поблизу точки екстраполяції формується оцінка

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{\mathbf{m}+1}) = \mathbf{x}(t_{\mathbf{m}+1}) + \delta_{\mathbf{m}+1}, \quad (9)$$

де $\mathbf{x}(t_{\mathbf{m}+1})$ - істина координата; $\delta_{\mathbf{m}+1}$ - погрішність її вимірювання.

Припустимо, що погрішності некорельовані поміж собою. Тоді

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{m} + 1, \mathbf{m} + 1) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{m} + 1, \mathbf{m}) + \underline{\mathbf{W}} \left[\tilde{\mathbf{x}}(t_{\mathbf{m}+1}) - \underline{\mathbf{M}}^T \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{m} + 1, \mathbf{m}) \right], \quad (10)$$

де $\underline{\mathbf{W}}$ - матриця згладжування.

Вираз (10) визначає структуру поліноміального фільтра Калмана.

На виході фільтра формується згладжена оцінка вектору стану на момент $t_{\mathbf{m}+1}$, яка одержана за усіма $(\mathbf{m}+1)$ вимірюваннями, а саме

$$\hat{\mathbf{x}}^T(\mathbf{m} + 1, \mathbf{m} + 1) = \left| \hat{\mathbf{x}}(t_{\mathbf{m}+1}), \hat{\dot{\mathbf{x}}}(t_{\mathbf{m}+1}) \right|. \quad (11)$$

Поставимо тепер задачу синтезу адаптивного фільтра при фільтрації безперервних процесів, зокрема скористуємося уявленням процесу як марківського. Отже, нехай це буде марківський процес першого порядку [7, 8]:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \underline{\mathbf{Q}}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{T}} \left[\tilde{\mathbf{S}}(t) - \underline{\mathbf{M}}_2 \hat{\mathbf{x}}(t) \right], \quad (12)$$

де $\tilde{\mathbf{S}}(t) = \underline{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{n}(t)$; $\underline{\mathbf{T}}$ - матриця коефіцієнтів передачі фільтра; $\underline{\mathbf{Q}}$ - матриця переходів стану, яка характеризує динамічні властивості системи.

При цьому матриця $\underline{\mathbf{T}}$ буде визначатись виразом [7]:

$$\underline{\mathbf{T}}(t) = \underline{\Sigma}_x(t) \underline{\mathbf{M}}_2^T \underline{\mathbf{N}}^{-1}, \quad (13)$$

де $\underline{\Sigma}_x(t)$ - матриця точності фільтрації процесу $x(t)$;

\underline{N}^{-1} - зворотна матриця шумів похибок вимірювань,

$$а \quad \underline{Q}(t) = \begin{vmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{vmatrix}; \quad \underline{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \underline{N}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/N_1 & 0 \\ 0 & 1/N_2 \end{vmatrix}; \quad \underline{\theta}(t) = \begin{vmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо прийняти, що $\sigma_x^2(t)$ - дисперсія фільтрації процесу $x(t)$, а $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$ - дисперсія фільтрації процесу $\dot{x}(t)$, то при умові їх незалежності

$$\underline{\Sigma}(t) = \begin{vmatrix} \sigma_x^2(t) & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2(t) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Після нескладних перетворювань матриця \underline{T} буде виглядати

$$\underline{T}(t) = \begin{vmatrix} \sigma_x^2(t)/N_1 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2(t)/N_2 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Підставляючи в (12) вираз для матриць $\underline{T}, \underline{Q}, \underline{M}$, одержимо

$$\frac{dx}{dt} = \begin{vmatrix} -q_1 \hat{x}(t) & 0 \\ 0 & -q_2 \hat{x}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x^2(t)/N_1 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2(t)/N_2 \end{vmatrix} \cdot \left[\tilde{S}(t) - \begin{vmatrix} \hat{x}(t) & 0 \\ 0 & \hat{\dot{x}}(t) \end{vmatrix} \right]. \quad (16)$$

Алгоритм фільтрації за Калманом в скалярному вигляді запишеться як:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= -q_1 \hat{x}(t) + \frac{\sigma_x^2(t)}{N_1} \left[S_1(t) - \hat{x}(t) \right]; \\ \frac{d\hat{\dot{x}}(t)}{dt} &= -q_2 \hat{\dot{x}}(t) + \frac{\sigma_{\dot{x}}^2(t)}{N_2} \left[S_2(t) - \hat{\dot{x}}(t) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Структура фільтра для цього випадку наведена на рис.2. Відзначимо, що даний алгоритм фільтрації одержаний у припущенні некорельованості процесів $x(t)$ і $\dot{x}(t)$.

Порівнюючи синтезований фільтр і одержаний в [2], примітимо, що вони практично ідентичні. Особливістю побудови даної системи є той факт, що до її складу входять блоки оцінки динамічних характеристик руху об'єкта та шумових складових фільтрованого процесу.

Складені процеси завжди присутні при здійснюванні маневру, оскільки вони характеризують "хитанку" об'єкта навколо певної траєкторії, яку слід визначати як математичне сподівання його руху.

Динаміку такого процесу можна уявити у вигляді диференціально-матричного рівняння [8-10]:

$$\frac{d^{(n)}\bar{\lambda}(t)}{dt^{(n)}} = \underline{A}(t)\bar{\lambda}(t) + \bar{\xi}(t), \quad (18)$$

де $\underline{A}(t)$ - матриця спектрів процесів, що фільтруються;

$\bar{\xi}(t)$ - вектор обурень.

Складові даного процесу спостерігаються в суміші з адитивним шумом

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k(t) + n(t),$$

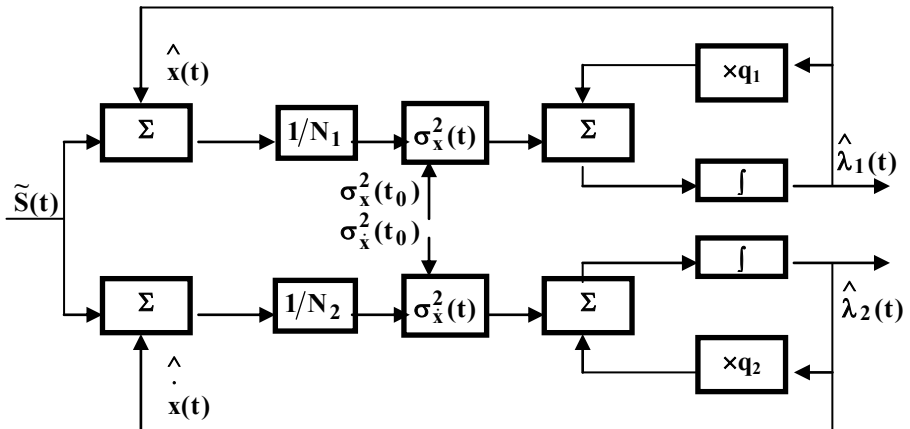


Рис.2. Структура фільтра при некорельованості процесів

Як доведено [8], оптимальним пристроєм фільтрації процесів типу (18), що спостерігаються на фоні білих шумів, править фільтр Калмана. При цьому оцінка процесу $\lambda(t)$ є рішенням рівняння

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \underline{A}(t)\hat{\lambda}(t) + \underline{H}(t) \left[\tilde{y}(t) - \underline{C}\hat{\lambda}(t) \right]. \quad (19)$$

Підставляючи значення відповідних матриць в (19), одержимо скалярні вирази для калмановської фільтрації :

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = -\alpha_1 \hat{\lambda}_1(t) + \frac{\sigma_{\lambda_1}^2(t) + K(t)}{N} \left[\tilde{y}(t) - \hat{\lambda}_1(t) - \hat{\lambda}_2(t) \right];$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = -\alpha_2 \hat{\lambda}_2(t) + \frac{\sigma_{\lambda_2}^2(t) + \mathbf{K}(t)}{N} \left[\tilde{y}(t) - \hat{\lambda}_1(t) - \hat{\lambda}_2(t) \right].$$

Суттєвість алгоритму (19) - уточнювання з бігом часу оцінок процесів $\hat{\lambda}_1(t)$ і $\hat{\lambda}_2(t)$. Структура фільтра для даної задачі наведена на рис. 3.

Змінний коефіцієнт фільтра з кожного компонента уявляє з себе відношення точнісних характеристик ($\sigma_{\lambda_1}^2(t)$, $\sigma_{\lambda_2}^2(t)$, $\mathbf{K}(t)$) до спектральної густини шумів. Оцінки процесів $\hat{\lambda}_1(t)$ і $\hat{\lambda}_2(t)$ з бігом часу уточнюються. Точність фільтрації кожного компонента характеризується діагональними елементами матриці $\underline{\Sigma}(t)$ дисперсій та коваріацій похибок, що задовольняє диференційно-матричному рівнянню Ріккати

$$\frac{d\underline{\Sigma}(t)}{dt} = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\Sigma}(t) + \underline{\Sigma}(t)\underline{\mathbf{A}}^T(t) + \underline{\theta}(t) - \underline{\Sigma}(t)\underline{\mathbf{C}}^T(t)\underline{\mathbf{N}}^{-1}(t)\underline{\mathbf{C}}(t)\underline{\Sigma}(t) \quad (20)$$

при початковій умові $\underline{\Sigma}(t_0) = \underline{\Sigma}_0$.

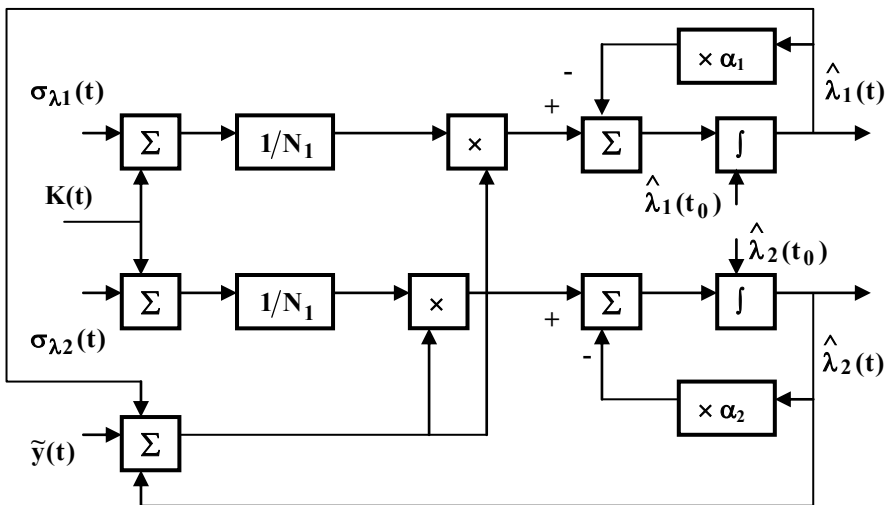


Рис. 3. Фільтр Калмана для складеного процесу

Підставляючи в (20) відповідні вирази для матриць, що входять до виразу, та перетворюючи отриманий результат в скалярну форму запису, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\lambda_1}^2(t)}{dt} &= -2\alpha_1\sigma_{\lambda_1}^2(t) + \Theta_1 + [\sigma_{\lambda_1}^2(t) + K(t)]^2 / N; \\ \frac{dK(t)}{dt} &= -K(t)[\alpha_1 + \alpha_2] - [\sigma_{\lambda_1}^2(t) + K(t)] \cdot [\sigma_{\lambda_2}^2(t) + K(t)] / N; \\ \frac{d\sigma_{\lambda_2}^2(t)}{dt} &= -2\alpha_2\sigma_{\lambda_2}^2(t) + \Theta_2 + [\sigma_{\lambda_2}^2(t) + K(t)]^2 / N. \end{aligned} \quad (21)$$

При цьому оцінка процесу $\lambda(t)$ здійснюється з похибкою, дисперсія якої дорівнює

$$\sigma_{\lambda}^2(t) = \sigma_{\lambda_1}^2(t) + \sigma_{\lambda_2}^2(t) + 2K(t).$$

Точність фільтрації з ростом часу збільшується, причому в реальному часі, що дає підставу для застосування синтезованого фільтра в системі управління ЛО, особливо при умові їх маневрування.

Таким чином, синтезовані фільтри Калмана для векторних процесів $x(t)$ і $\lambda(t)$ дозволяють здійснювати адаптацію до динамічних характеристик руху об'єкта з урахуванням реальних заводових обставин, що, в свою чергу, дозволяє зменшити похибки визначення параметрів траєкторії. Наведена структура є оптимальною в смислі мінімізації похибки фільтрації навігаційних функцій, при цьому можна наперед пред'явити вимоги до величини обурень, при яких фільтри дають результат, що не розходиться.

ЛІТЕРАТУРА

1. Navarro A.M. Procedure for Tracking Manoeuvring Targets with a Multi-purpose Phased-array System/Int/ Conf/ Radar-77. – 1977. – London. – P. 150 - 154.
2. Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Оценивание параметров траекторий управляемых объектов на основе теоремы Котельникова и принципа разделения // Радиотехника. – 1997. – № 4. – С. 34 - 37.
3. Новицкий П.В., Зograф К.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. - 304 с.
4. Taenzer E. Tracking Multiple Targets Simultaneously with a Phased Array Radar - IEEE Trans. 1980. Vol. AES-16, № 5. – P. 604 - 614.
5. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
6. Моделирование и имитация распространения радиоволн при спутниковой связи с подвижными объектами // Экспресс-информация. РТУС. – 1993. – № 15. – С. 2 - 8.
7. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.

8. Браммер К, Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. – М.: Наука, 1982. – 200 с.
9. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.
10. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.

Надійшла до редколегії 03.09.2001
