

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ НА ЭТАПЕ ТРАНСПОРТИРОВКИ

В.А. Табуненко

(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

Предложена методика, позволяющая исследовать динамические характеристики изделий специального назначения с отсеками, содержащими жидкость. В основе проведенных теоретических исследований лежит расчетная схема механической системы с распределенными параметрами и сосредоточенными массами и использование численных методов.

С целью сокращения времени для подготовки к пуску летательных аппаратов (ЛА), их необходимо заправлять заблаговременно и транспортировать к месту применения в заправленном состоянии. Отсюда возникает актуальная задача изучения влияния колеблющихся жидких компонентов топлива (ЖКТ) внутри топливного отсека (ТО) на упругие колебания корпуса ЛА и массу полезного груза на этапе транспортировки. Решить данную задачу можно, используя модели в виде:

- обобщенного натурального объекта ЛА;
- физической модели ЛА (с учетом критериев подобия);
- математической модели ЛА с распределенными параметрами и сосредоточенными массами;
- конкретной реализации разрабатываемого ЛА.

В приведенной статье предлагается рассмотреть теоретический подход позволяющий оценить влияние ЖКТ, находящихся в ТО на корпус ЛА при транспортировке его самоходными колесными транспортными средствами при помощи математической модели.

На рис.1 приведена расчетная схема механической системы типа ЛА с ЖКТ с распределенными параметрами и сосредоточенными массами. ЛА можно представить в виде балки с распределенными параметрами, на которой закреплены с помощью упругих невесомых связей ( $C_0 - C_3$ ) и в виде дискретных масс, схематизирующих двигатель ( $m_0$ ), ЖКТ ( $m_1$  и  $m_2$ ) и массу полезного груза ( $m_i$ ). В общем случае, количество  $n$  сосредоточенных масс  $m_i$  зависит от конкретной схемы ЛА ( $i = \overline{1, n}$ ). Перемещение дискретных масс ограничено вертикальной плоскостью параллельно оси  $Y$ . Начало отсчета помещаем в точку  $O$ . По оси координат  $X$ , проходя-

шей вдоль балки, обозначены координаты крепления дискретных масс  $x_0 - x_4$  соответственно. Сосредоточенные массы  $m_1'$  и  $m_2'$  схематизируют подвижные части соответствующих ЖКТ и могут совершать угловые перемещения вдоль продольной плоскости балки с длиной подвеса на нерастяжимых и невесомых нитях  $l_1$  и  $l_2$  и углами отклонения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Левая часть балки опирается на упругую неподвижную опору  $C_4$ . Консольная часть балки опирается на правую упругую опору  $C_5$ , которая может менять свое местоположение вдоль оси  $X$ .

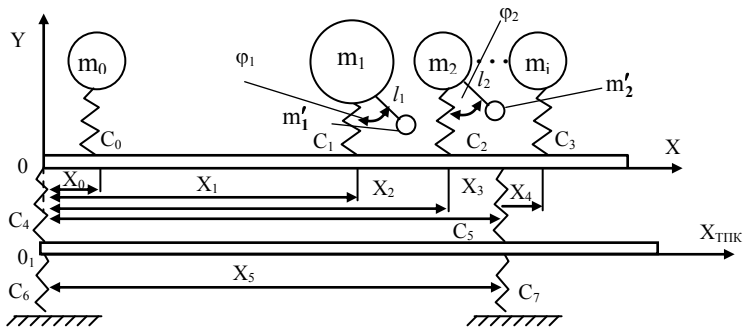


Рис. 1. Расчетная схема механической системы типа ЛА с ЖКТ

Верхняя балка установлена на нижнюю двухопорную балку с распределенными параметрами, схематизирующую тягач. Левая часть балки опирается на упругую опору  $C_6$ , а правая часть опирается на упругую опору  $C_7$ . Начало отсчета для второй балки помещаем в точку  $O_1$ .

Особенностью рассматриваемой расчетной схемы является учет в ней ЖКТ, которые допускается представлять в виде сосредоточенных масс [1]. Вся масса жидкости, находящаяся в изделии, делится на неподвижную  $m_t$  и подвижную  $m_i$  массы. При этом выполняется равенство  $m = m_t + \sum m_i$ , где  $m$  - полная масса жидкости. Далее отмечено, что для первой гармоники колебаний приведенная масса подвижной жидкости численно равна массе объема цилиндра с высотой, равной примерно половине ( $0,45 R$ ) радиуса ТО. Для второй гармоники колебаний приведенная масса подвижной жидкости в 30 раз меньше. Решение этой задачи, имеющее точность, достаточную для технических расчетов, приведено в [1]. Подвижная масса жидкости в ЛА определяется по формуле

$$m'_{1,2} \approx \frac{\pi \rho R^4}{4l_{1,2}},$$

где  $\rho$  - плотность жидкости;  $R$  - радиус бака.

Уравнения колебаний свободной поверхности жидкости аналогичны уравнениям колебаний маятников. Используя эту аналогию, в расчетной

схеме заменяем колеблющуюся жидкость системой математических маятников. Возможность такой замены была показана в [2].

Расчетную схему механической системы типа ЛА с ЖКТ в общем случае допускается рассматривать при прямолинейном установившемся движении, как систему, совершающую вертикальные колебания  $y = y(t)$  и угловые колебания подвижной массы жидкости  $\varphi = \varphi(t)$ .

Математическая модель колебаний рассматриваемой механической системы построена на основе классических уравнений колебания балок, которая описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + m_0 \delta(x - x_0) \left( \ddot{y}_0 + \ddot{y} \right) + m_1 \delta(x - x_1) \left( \ddot{y}_1 + \ddot{y} \right) + m_2 \delta(x - x_2) \left( \ddot{y}_2 + \ddot{y} \right) + m_3 \delta(x - x_3) \left( \ddot{y}_3 + \ddot{y} \right) + \sum_{k=1}^2 \delta(x - x_2^k) k_x = P(x, t),$$

$$m_0 \ddot{y}_0 + c_0 (y_0 - y) = 0 ;$$

$$m_1^* \ddot{y}_1 + c_1 (y_1 - y) + m_1' l_1 \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 + m_1' g = 0 ;$$

$$\frac{\Phi_1}{l_1} \ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 + \frac{\Phi_1}{l_1} g, \quad \text{где} \quad m_1^* = m_1 + m_1' ;$$

$$m_2^* \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y) + m_2' l_2 \ddot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_2 + m_2' g = 0 ;$$

$$\frac{\Phi_2}{l_2} \ddot{y}_2 - \ddot{\varphi}_2 + \frac{\Phi_2}{l_2} g, \quad \text{где} \quad m_2^* = m_2 + m_2' ;$$

...

$$m_i \ddot{y}_3 + c_3 (y_3 - y) = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{\text{тнк}}^2} \left( EI(x_{\text{тнк}}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x_{\text{тнк}}) \frac{\partial^2}{\partial t_{\text{тнк}}^2} = 0$$

при заданных начальных условиях

$$y_0(t=0) = Y_0; \quad \dot{y}_0(t=0) = 0; \quad y_1(t=0) = Y_0; \quad \dot{y}_1(t=0) = 0;$$

$$y_2(t=0) = Y_0; \quad \dot{y}_2(t=0) = 0; \quad y_3(t=0) = Y_0; \quad \dot{y}_3(t=0) = 0;$$

$$\Phi_1(t=0) = \Phi_0; \quad \dot{\Phi}_1(t=0) = 0; \quad \Phi_2(t=0) = \Phi_0; \quad \dot{\Phi}_2(t=0) = 0$$

и граничных условиях:

$$y''(0) = 0; \quad y'''(0) = c_4 y; \quad y''_{\text{тнк}}(0) = 0; \quad y'''_{\text{тнк}}(0) = c_6 y_{\text{тнк}} ;$$

$$y''(x_3) = 0; \quad y'''(x_3) = c_5 y; \quad y''_{\text{тнк}}(x_5) = 0; \quad y'''_{\text{тнк}}(x_5) = c_7 y_{\text{тнк}} ,$$

где  $E$  - модуль упругости балки;  $t$  - время;  $I(x)$  - момент инерции балки;  $m(x)$  - распределенная масса балки;  $y = y(x, t)$  - прогиб балки.

Для решения этой системы дифференциальных уравнений использован метод конечных разностей. Основные положения этого метода приводятся в работе [3]. В результате решения системы дифференциальных уравнений были получены частота ( $f$ ) и амплитуда колебаний ( $A$ ) верхней балки. В качестве входных величин при решении использовались параметры, характеризующие натуральный объект. В результате решения получены:  $f_1 = 1,2$  Гц,  $A_1 = 0,05$  м при запрограммированном ЖКТ натурном изделии и  $f_2 = 2,5$  Гц,  $A_2 = 0,015$  м при незапрограммированном.

Одним из критериев правильности выбора математической модели ЛА является сравнение частот и форм упругих колебаний с результатами экспериментальных исследований, проведенных на физической модели. С целью создания физической модели были разработаны критериальные зависимости в виде безразмерных комплексов [4] для натурального и модельного объектов

$$\left( \frac{mSL^4 \omega^2}{EI} \right)_H = \left( \frac{mSL^4 \omega^2}{EI} \right)_M,$$

где  $S$  - поперечное сечение;  $L$  - длина;  $\omega$  - частота колебаний корпуса, и построена экспериментальная установка для физического моделирования [5]. Проведенные экспериментальные исследования [6] подтвердили результаты теоретических исследований (относительная ошибка составила 8 - 15%).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников К.С., Сухов В.Н. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1974. – 266 с.
2. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 246 с.
3. Заварькин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1991. – 175 с.
4. Табуненко В.А. Разработка экспериментальной установки для исследования динамических характеристик механических конструкций с отсеками, содержащими жидкость // Зб. наук. праць. – Харків: ХВУ. – 2001. – Вип. 4(30). – С. 176 - 179.
5. Патент № 33464А Украина, МКИ 6 G 09В 23\06. Стенд для дослідження гнучких коливальних довшомірних вантажів при їх транспортуванні. Заявка на изобретение / Табуненко В.А., Иванченко О.В., Прокопов В.А., Бушманов Д.В., № 99021069; Заявл. 09.04.85; Опубл. 15.02.2001.
6. Табуненко В.А. Экспериментальные исследования и анализ динамических характеристик механических конструкций с отсеками, содер-

жащими жидкость // Сб. научн. тр. – Харьков: ХВУ. – 2000. Вып. 1(31). – С. 120 - 121.

*Поступила в редколлегию 31.07.2001*

---