УДК 517.11, 519.8, 681.51

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

И.В. Дронова
(представил д.т.н., проф. В.М. Вартанян)

Рассмотрены традиционная структура, область значений, методы определения вида функции принадлежности (ФП) нечеткого множества, показаны возможные нетрадиционные подходы. Предложен новый подход, в котором при моделировании области значений ФП для сложных систем используются категории специального вида, применяемые в теории топосов.

Нетрадиционные (плохо определенные, слабо структурированные) объекты управления характеризуются уникальностью создаваемой системы управления, отсутствием формализуемой цели существования (большие сложности в формировании критерия управления), отсутствием оптимальности (неправомочность для объектов такой природы классической задачи оптимизации), динамичностью системы (с течением времени меняется их структура и функционирование), неполнотой описания, наличием свободы воли (во многих объектах управления люди являются элементами их структуры). Информацию о таком объекте и способах управления им [1] можно выразить только средствами естественного языка: подготовить описание объекта, ситуаций и процедур управления в виде текста.

Лингвистический подход обеспечивает количественное описание элементов моделей при нечеткой информации. Каждое высказывание содержит две основные лингвистические категории: денотаты и функторы, причем денотаты используются для обозначения объектов, а функторы - для обозначения отношений между ними. Для каждого правильного множества словесных утверждений существует модель утверждений, описывающих формальную связь между денотатами. Система определяется как отношение – некоторое множество особого вида.

Любое понятие имеет две стороны – *экстенсионал* и *интенсионал*. Экстенсионал – набор конкретных фактов, соответствующих данному понятию. Он может быть конечным или бесконечным (в этом случае можно задавать некоторое характеристическое правило, удовлетворение которому определяет принадлежность экстенсионалу). Интенсионал задает некоторую процедуру, позволяющую определить принадлежность того или иного конкретного факта к некоторому понятию, и выделяет знания, отделяет их от данных, которые всегда задаются экстенсионально. К группам, несущим функциональную нагрузку относятся: 1) *понятия* (конкретное понятие; понятие-класс), формирование понятий происходит посредством суждений; 2) *имена*; 3) *отношения* (классификации, сравнения, принадлежности, замещения, признаковые отношения, количественные, временные, пространственные, казуальные, инструментальные, информационные, порядковые); наиболее интересны казуальные отношения, отражающие причинно - следственные связи, а также связи, отражающие цели, мотивацию, предпочтение при принятии решений и выборе курса действий; 4) *действия - императивы, процессы, состояния*; 5) *квантификаторы*; 6) *модификаторы*; 7) *модальности*; 8) *оценки*.

Применяются лингвистические критерии, лингвистические отношения предпочтения и лингвистическая вероятность. Для формализации качественных характеристик используется *функция принадлежности* (ФП), позволяющая количественно выделить *норму*, характеризующую явление, факт или процесс. Начиная с 1965 года, получила распространение теория нечетких множеств Л. Заде, основная идея которой состоит в том, что высказывание о принадлежности некоторого объекта какому-либо множеству, могущее принимать для обычного «канторовского» случая два значения: «истина» (или 1) и «ложь» (соответственно 0), для нечеткого множества принимает одно из континуума значений: каждое такое высказывание для элемента $\mathbf{x}$ и множества $\mathbf{A}$ принимает вид $\mu(\mathbf{x} \in \mathbf{A})$, где μ ($0 \le \mu \le 1$) - так называемая функция членства, определяющая «вес» («меру уверенности», «степень добротности») принадлежности $\mathbf{x}$ множеству $\mathbf{A}$ (рис.1).

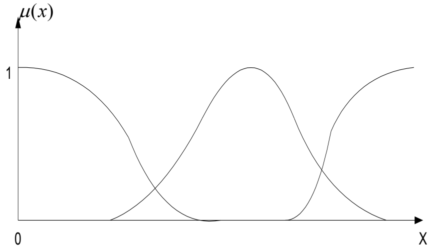


Рис. 1. Использование предметной шкалы при построении ФП

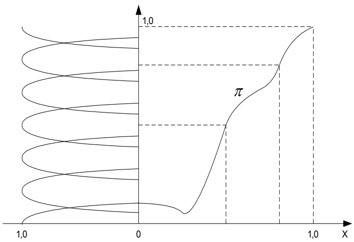


Рис. 2. Переход на универсальную шкалу

Кроме «бесконечнозначной» логики Заде, для интерпретации «расплывчатости» возможно применение пороговой, мажоритарной логик, многозначной логики (логики Бочвара, логики Лукасевича).

Обычно ФП вводят в виде лингвистической переменной, заданной на некоторой базовой количественной шкале и принимающей значения на терминологии естественного языка. Обзор простейших функций принадлежности для $(\mathbf{x} \in [\,0,+\infty\,], \mu(\mathbf{x}) \subset [0,1])$ и $(\mathbf{x} \in [-\infty,+\infty\,], \mu(\mathbf{x}) \subset [\,0,1\,])$ сделан в [2]. Могут использоваться и комбинированные нечетко - стохастические модели, например, $\mu : X \times \Omega \longrightarrow [0,1]$, т.е. $(\mu(x,w),(\Omega,\beta,\rho))$, где (Ω,β,ρ) - параметрическое пространство. В [3] функция принадлежности интерпретируется как *распределение возможностей*. Используются мера неопределенности, меры возможности и необходимости, вводится вероятностная мера, рассматриваются особенности построения нечеткого множества по статистическим данным. Теория нечетких множеств может рассматриваться как часть более общей теории случайных множеств. Возможные варианты описания “размытости” показаны на рис. 3.

В большинстве случаев интерпретация ФП дается исходя из реальной основы понятия и его источников в реальных процессах. Степень принадлежности $\mu_A(x)$ элемента x нечеткому множеству A интерпретируется как субъективная мера того, насколько элемент $x \in X$ соответствует понятию, смысл которого формализуется нечетким множеством A. При этом степень соответствия – не условная вероятность наблюдения события A при возникновении события x, а возможность интерпретации x понятием, формализуемым нечетким множеством A. Среди методов построения ФП различают методы для одного эксперта (формальное задание функций, назначение значений, семмантические дифференциалы), для группы экспертов (частотная и субъективная вероятности, определение ФП на основе интервальных оценок, выделение нечеткого подмножества, описывающего рассматриваемое понятие) и методы построения терм множеств. Прямые методы (результаты экспертного опроса имеют много субъективизма) могут использоваться только в том случае, когда случайные ошибки незначительны и маловероятны. Косвенные методы применяются для снижения субъективного влияния на результаты построения ФП для оценок степеней принадлежности неизмеримых понятий, т.е. не имеющих очевидной базовой шкалы. В настоящее время разработаны способы доработки и уточнения ФП (генетический алгоритм и т.п.), но кажется интересным вернуться к идее Л.Заде о том, что истинностные значения прежде всего должны соответствовать объекту рассуждения.

Решение проблемы формализации в рамках математической теории общих систем предполагает следующие шаги.

1. Основные системные понятия вводятся с помощью процесса *формализации,* предполагающего переход от словесного интуитивного описания к точному математическому определению этого понятия, используя для этого минимальную математическую структуру.

2. Опираясь на основные (фундаментальные для данной системы) понятия, добавляются новые математические структуры, необходимые для исследования общих свойств системы. Чтобы построить некоторую теорию, необходимо наделить систему дополнительной структурой, т.е. определить одну или несколько операций, относительно которых она становится алгеброй.

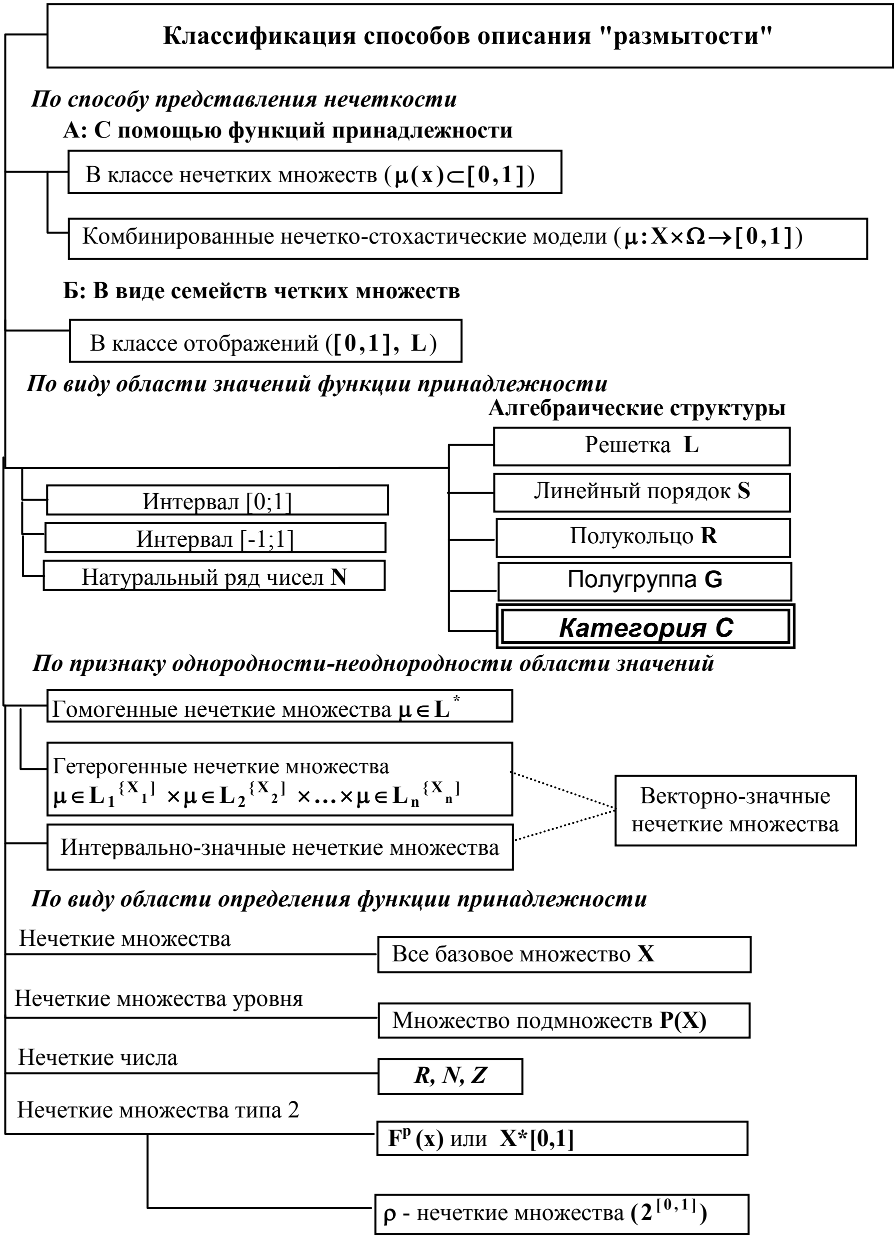
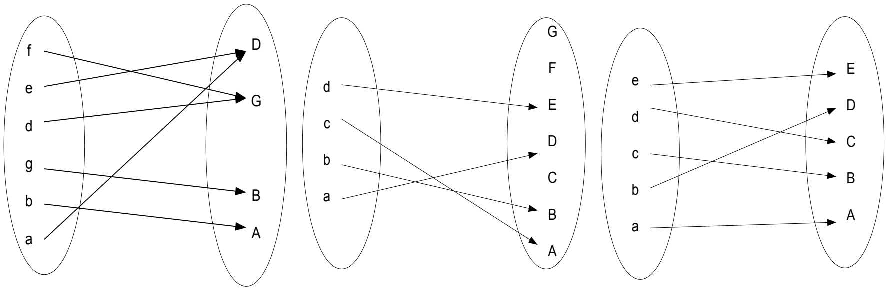


Рис. 3. Обобщенная классификация способов описания "размытости"

Нечеткость (или размытость) – это такое свойство объекта, при котором не выполняется отношение эквивалентности: объект одновременно может принадлежать данному классу (множеству) и не принадлежать ему. При переходе от словесного описания объекта к количественному возможны следующие варианты соотношений:

- «быть моделью» рассматривается как отношение эквивалентности, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности – изоморфное отображение;
- модель может «быть проще» оригинала в отдельных его свойствах и в чем-то, в чем мы не заинтересованы, «быть сложнее» - рефлексивное, транзитивное, но не симметричное - это гомоморфное отображение, то есть отображение одной группы, структуры в другую, сохраняющее операции (образ результата операции, производимой над элементами исходного множества, можно получить, выполнив над образами элементов операцию, определенную на содержащем их множестве);
- симметричное отношение: «иметь подобные друг другу упрощенные образы» - вытекает из свойств изоморфизма и гомоморфизма.

Существуют различные виды отображений. На рис.4 показаны соответствующие им функции.



Сюръективное Инъективное Биективное

Рис. 4. Отображения, определяемые как функции

Категория – это совокупность объектов и отображений, удовлетворяющих определенным тождествам (табл.1). С помощью категорий в теории топосов можно получать различное количество истинностных значений (истинностными значениями могут быть самые неожиданные объекты) и работать с ними [4,5]. Лингвистические модели основаны на нечеткой логике с лингвистическими значениями истинности, которая позволяет формализовать качественные характеристики. Особый интерес имеет не только форма функции принадлежности, но и сам способ математического описания “размытости”, в частности, область значений ФП.

В настоящее время еще нет единого подхода к построению функции принадлежности нечеткому множеству. Традиционным считается подход Л. Заде (область значений – на интервале [0; 1]) и его последователей.

В связи с увеличением вычислительных мощностей компьютеров, появлением математических пакетов аналитических вычислений, типа *Maple V*, появилась реальная возможность исследования и моделирования области значений функции принадлежности на различных интервалах, а также на таких алгебраических структурах как решетка, линейный порядок, полукольцо, полугруппа.

Таблица 1

Категории, применяемые в теории топосов

Категория	**Объекты**	**Стрелки**
Set	Все множества	Все функции между множествами
Finset	Все конечные множества	Все функции между конечными множествами
Nonset	Все непустые множества	Все функции между непустыми множествами
Top	Все топологические пространства	Все непрерывные функции между топологическими пространствами
Vect	Векторные пространства	Линейные преобразования
Grp	Группы	Гомоморфизмы групп
Mon	Моноиды	Гомоморфизмы моноидов
Met	Метрические пространства	Сжатия
Man	Многообразия	Гладкие отображения
Top Grp	Топологические группы	Непрерывные гомоморфизмы
Pos	Частично упорядоченные множества	Монотонные функции

Новизна предложенного подхода состоит в использовании топосов (специального вида категорий), способных служить моделями для теоретико-множественных конструкций. Топосы являются математическим средством унификации и обобщения математических задач и методов их решения. Это позволяет рассматривать сложную систему комплексно, а не только учитывая отдельные характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1.Дронова И.В. Применение нечетких множеств при построении модели информационной системы анализа реализуемости проектов // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вип.1(11). – С. 64 - 69.

2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

3. Дюбуа Д.. Теория возможностей. – М.: Радио и связь, 1990. – 287 с.

4. Кок А., Рейес Г.Э. Доктрины в категорной логике/ / Теория моделей. Т. 1. – М.: Наука, 1982. – 392 с.

5. Джонстон П.Т. Теория топосов – М.: Наука, 1986. – 440 с.

Поступила в редколлегию 10.09.2001