

## О ФУНКЦИОНАЛЕ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПОДЪЁМА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В СТАРТОВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

проф. В.А. Прокопов, Ю.А. Олейник

Рассматривается задача оптимального по быстродействию подъёма летательного аппарата в два этапа из походного положения в стартовое при помощи одноступенчатого гидродомкрата. В качестве этапов рассматривается разгон и торможение. Предлагается способ для определения угла перехода от разгона к торможению. Рекомендуется подход к формированию функционала.

При рассмотрении оптимальных моделей подъёма летательного аппарата (ЛА) в стартовое положение принята схема [1], показанная на рис. 1. Все элементы модели абсолютно твёрдые. Ветер отсутствует. На ресурсы

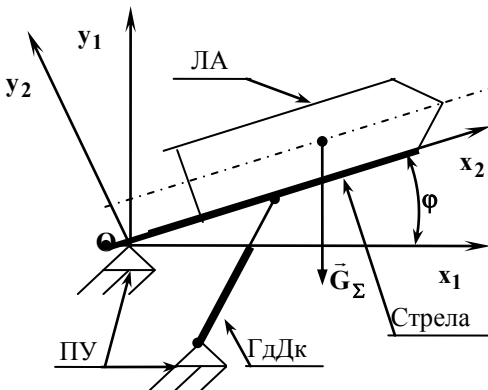


Рис. 1. Модель подъема ЛА

ограничения не накладываются. Движение рассматривается в неподвижной системе координат  $x_1Oy_1$ , где  $Ox_1$  параллельна плоскости горизонтирования ПУ;  $x_2Oy_2$  - подвижная система координат, где  $Ox_2$  параллельна оси симметрии ЛА и связана с ним. Процесс подъёма описывается фазовой координатой  $\varphi$  и её производными  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$ . Величина  $\ddot{\varphi}$  ограничивается допустимой поперечной перегрузкой  $[n_{y2}]$ . Определяется поперечная перегрузка через силу, развиваемую ГдДк, или силы инерции и веса ПС [2]:

$$n_{y2} = \left( \frac{l_{цт}}{g} \ddot{\varphi} + \cos \varphi \right) \leq [n_{y2}], \quad (1)$$

где  $l_{цт}$  - расстояние от точки  $O$  до центра тяжести ЛА, м;  $g$  - ускорение свободного падения,  $m/c^2$ ;  $\ddot{\varphi}$  - угловое ускорение подъёма,  $1/c^2$ ;  $[n_{y2}]$  - допустимая поперечная перегрузка.

Из (1) можно получить выражение для допустимых угловых ускорений

$$[\ddot{\varphi}] = \frac{g}{l_{цт}} ([n_{y2}] - \cos \varphi). \quad (2)$$

Функция  $[\ddot{\varphi}](\varphi)$  нелинейно возрастает на промежутке  $\varphi \in (0; \pi/2)$  по закону, изображённому на рис. 2.

Задача состоит в том, чтобы при заданных выше условиях найти стратегию такого управления, при которой критерий оптимальности  $K$  принимал бы экстремальное значение, в зависимости от требований к  $K$ . Такая стратегия называется оптимальной [3].

Процесс подъёма ЛА в стартовое положение осуществляется с помощью объёмного гидропривода (ГдПр). Основными параметрами ГдПр являются давление жидкости  $p_1$  и

расход жидкости  $Q$ . Если учесть, что  $p_1$  зависит от нагрузки на шток и потерь энергии жидкости в магистрали, то единственным параметром, с помощью которого рационально управлять ГдПр, остаётся  $Q$ .

Заметим, что на задачу оптимизации существенное влияние оказывает критерий оптимизации. Целесообразно отметить, что движение ПС может быть оптимизировано по ряду критериев: по быстродействию (минимальное время подъёма), по минимальной потребляемой мощности  $N$  ( $N = p_1 Q$ ), по ходу ГдДк (ход минимальный), по массе ГдДк (масса ГдДк минимальна) и т.д.

В данной статье в качестве критерия выбирается быстродействие. Как известно [3], при данной постановке задачи критерием оптимальности является время перехода системы из начального положения, которое описывается начальным значением фазовой координаты, в конечное положение. В теореме об  $n$  интервалах [3] доказано, что, если движение системы описывается дифференциальным уравнением второго порядка и на вторую производную наложено ограничение, то минимальное время движения системы из начального положения ( $\varphi = \varphi_1$ ) в конечное ( $\varphi = \varphi_2$ ) можно получить, двигаясь на двух интервалах: сначала на  $\varphi_1 \leq \varphi_{пт} \leq \varphi_{пт}$  с ускорением  $[\ddot{\varphi}](\varphi)$  (разгон), а затем на  $\varphi_{пт} \leq \varphi \leq \varphi_2$  -

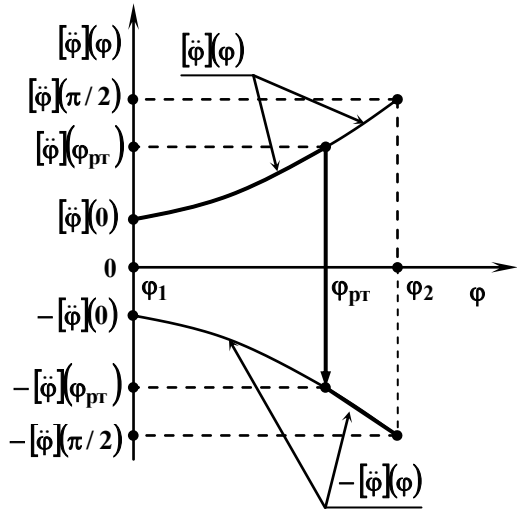


Рис. 2. Схема этапов подъёма ЛА

с ускорением  $-\ddot{\varphi}(\varphi)$  (торможение) (рис. 2), где  $\varphi_{\text{пр}}$  - угол перехода от разгона к торможению, причём  $\varphi_1 < \varphi_{\text{пр}} < \varphi_2 \leq \pi/2$ .

Пусть заданы  $\ddot{\varphi}_p(\varphi)$  - функция или закон изменения углового ускорения разгона ПС и  $\ddot{\varphi}_t(\varphi)$  - функция изменения углового ускорения торможения ПС, начальная и конечная угловые скорости подъёма  $\dot{\varphi}(\varphi_1) = \dot{\varphi}_1$ ,  $\dot{\varphi}(\varphi_2) = \dot{\varphi}_2$ . Функция  $\ddot{\varphi}_p(\varphi)$  лежит выше оси  $o\varphi$ , а функция  $\ddot{\varphi}_t(\varphi)$  ниже оси  $o\varphi$  (рис. 2).

Первое, что необходимо определить, угол перехода ПС от разгона к торможению  $\varphi_{\text{пр}}$ . При разгоне угловое ускорение в точке  $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_{\text{пр}}]$  равно значению заданной функции  $\ddot{\varphi}_p(\varphi)$  в данной точке

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_p(\varphi). \quad (3)$$

Произведём замену переменных

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\tau} = \frac{d\dot{\varphi}}{\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}} = \frac{\dot{\varphi} d\dot{\varphi}}{d\varphi} \quad (4)$$

и подставив (4) в (3), получим

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi. \quad (5)$$

Проинтегрируем (5)

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_{\text{пр}}} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{\text{пр}}} \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi \quad (6)$$

и получим:

$$\frac{\dot{\varphi}_{\text{пр}}^2}{2} - \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{\text{пр}}} \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi; \quad (7)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_{\text{пр}}^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{\text{пр}}} \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}. \quad (8)$$

Если момент инерции ПС постоянен на промежутке  $[\varphi_1; \varphi_{\text{пр}}]$ , то площадь под кривой  $\ddot{\varphi}_p(\varphi)$  на отрезке разгона равна кинетической энергии, сообщённой единице момента инерции ПС.

При торможении угловое ускорение в точке  $\varphi \in [\varphi_{\text{пр}}; \varphi_2]$  равно значению заданной функции  $\ddot{\varphi}_t(\varphi)$  в данной точке:

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_t(\varphi). \quad (9)$$

Подставив (4) в (9) и проинтегрируя обе части уравнения, получим

$$\int_{\Phi_{\text{пр}}}^{\Phi_2} \dot{\phi} \, d\phi = \int_{\Phi_{\text{пр}}}^{\Phi_2} \ddot{\phi}_{\text{т}}(\phi) \, d\phi . \quad (10)$$

После преобразований, аналогичных (7), получим

$$\frac{\dot{\phi}_{\text{пр}}^2}{2} = - \int_{\Phi_1}^{\Phi_{\text{пр}}} \ddot{\phi}_{\text{т}}(\phi) \, d\phi + \frac{\dot{\phi}_2^2}{2} . \quad (11)$$

Если момент инерции ПС постоянен на промежутке  $[\Phi_{\text{пр}}; \Phi_2]$ , то площадь под кривой  $\ddot{\phi}_{\text{т}}(\phi)$  на отрезке торможения равна кинетической энергии, отобранной у единицы момента инерции ПС. Приравняв правые части (8) и (11), получим уравнение для определения  $\Phi_{\text{пр}}$ :

$$\frac{\dot{\phi}_1^2}{2} + \int_{\Phi_1}^{\Phi_{\text{пр}}} \ddot{\phi}_{\text{р}}(\phi) \, d\phi = - \int_{\Phi_{\text{пр}}}^{\Phi_2} \ddot{\phi}_{\text{т}}(\phi) \, d\phi + \frac{\dot{\phi}_2^2}{2} . \quad (12)$$

Заметим, что (12) является уравнением сохранения кинетической энергии единицы момента инерции ПС при постоянном моменте инерции от  $\Phi_1$  до  $\Phi_2$ .

Время подъёма ПС в стартовое положение  $\tau_{\text{п}}$  определяется как

$$\tau_{\text{п}} = \tau_{\text{р}} - \tau_{\text{т}} . \quad (13)$$

Сформируем выражение для времени разгона  $\tau_{\text{р}}$  ПС. Воспользуемся выражением (6). Для этого верхний предел интегрирования установим как произвольный, т. е.  $\Phi_{\text{пр}} = \Phi$  и  $\dot{\phi}_{\text{пр}} = \dot{\phi}$ . Тогда

$$\int_{\Phi_1}^{\dot{\phi}} \dot{\phi} \, d\phi = \int_{\Phi_1}^{\Phi} \ddot{\phi}_{\text{р}}(\phi) \, d\phi \quad (14)$$

и после интегрирования получим

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\dot{\phi}_1^2}{2} = \int_{\Phi_1}^{\Phi} \ddot{\phi}_{\text{р}}(\phi) \, d\phi . \quad (15)$$

Откуда

$$\dot{\phi} = \sqrt{2 \int_{\Phi_1}^{\Phi} \ddot{\phi}_{\text{р}}(\phi) \, d\phi + \dot{\phi}_1^2} ; \quad (16)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{2 \int_{\Phi_1}^{\Phi} \ddot{\phi}_{\text{р}}(\phi) \, d\phi + \dot{\phi}_1^2} \quad (17)$$

или

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi. \quad (18)$$

Время нахождения ПС в фазовой координате  $\varphi_1$  обозначим  $\tau_1$ , в  $\varphi_{pr}$  –  $\tau_{pr}$ . Откуда  $\tau_p = \tau_{pr} - \tau_1$ . Из критерия оптимальности процесса разгона по быстродействию с учётом (18) следует

$$\tau_p = \int_{\tau_1}^{\tau_{pr}} d\tau = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{pr}} \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi. \quad (19)$$

Для определения времени торможения  $\tau_T = \tau_2 - \tau_{pr}$  запишем (10) как

$$\int_{\varphi_{pr}}^{\varphi} \dot{\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_{pr}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_T(\varphi) d\varphi, \quad (20)$$

где верхний предел переменной равен  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ . Производя для процесса торможения преобразования, аналогичные (15) - (18), получим:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2 \int_{\varphi_{pr}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_T(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_{pr}^2}; \quad (21)$$

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_{pr}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_T(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_{pr}^2}} d\varphi. \quad (22)$$

Из критерия быстродействия

$$\tau_T = \int_{\tau_{pr}}^{\tau_2} d\tau = \int_{\varphi_{pr}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_{pr}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_T(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_{pr}^2}} d\varphi. \quad (23)$$

Сложим уравнения (19) и (23) и получим выражение для определения времени подъёма  $\tau_{\Pi}$ :

$$\tau_{\Pi} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_{pr}} d\tau + \int_{\tau_{pr}}^{\tau_2} d\tau = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{pr}} \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi + \int_{\varphi_{pr}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_{pr}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_T(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_{pr}^2}} d\varphi. \quad (24)$$

Итак, в правой части (24) находится функционал, являющийся критерием оптимальности при рассмотрении оптимального по быстродействию переходного процесса системы из одной фазовой координаты в другую. Для решения задачи оптимизации процесса подъёма ЛА необходимо минимизировать функционал

$$\bar{K}_\tau = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{\text{пр}}} \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_p(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi + \int_{\varphi_{\text{пр}}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\varphi_{\text{пр}}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_T(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_{\text{пр}}^2}} d\varphi. \quad (25)$$

При разгоне и торможении по границе (2) для функций разгона и торможения получим

$$\ddot{\varphi}_{p,T}(\varphi) = \pm [\ddot{\varphi}] (\varphi) = \pm \frac{g}{l_{\text{цт}}} ([n_{y2}] - \cos \varphi). \quad (26)$$

И, если  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ , то функционал  $\bar{K}_\tau$  приобретёт вид

$$\bar{K}_\tau = \sqrt{\frac{l_{\text{цт}}}{2g}} \left( \int_0^{\varphi_{\text{пр}}} \frac{1}{\sqrt{[n_{y2}] \varphi - \sin \varphi}} d\varphi + \int_{\varphi_{\text{пр}}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{[n_{y2}] (\varphi_{\text{пр}} - \varphi) + \sin \varphi - \sin \varphi_{\text{пр}} + \dot{\varphi}_{\text{пр}}^2}} d\varphi \right). \quad (27)$$

Значение  $\varphi_{\text{пр}}$  можно определить из (12) с учётом (26):

$$\frac{g}{l_{\text{цт}}} \int_0^{\varphi_{\text{пр}}} ([n_{y2}] - \cos \varphi) d\varphi = \frac{g}{l_{\text{цт}}} \int_{\varphi_{\text{пр}}}^{\varphi_2} ([n_{y2}] - \cos \varphi) d\varphi. \quad (28)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Конофеев Н.Т. Транспортировка ракет. – М.: Воениздат, 1978. – 150 с.
2. Олейник Ю.А., Прокопов В.А. К оценке параметров подъёма летательного аппарата в стартовое положение // Системы обработки информации. – ХФВ «Транспорт Украины», 2000. – Вып. 4(10). – 212 с.
3. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966. – 263 с.

Поступила в редколлегию 24.09.2001