УДК 624.15.691.175

О ФУНКЦИОНАЛЕ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПОДЪЁМА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В СТАРТОВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

проф. В.А. Прокопов, Ю.А. Олейник

Рассматривается задача оптимального по быстродействию подъёма летательного аппарата в два этапа из походного положения в стартовое при помощи одноступенчатого гидродомкрата. В качестве этапов рассматривается разгон и торможение. Предлагается способ для определения угла перехода от разгона к торможению. Рекомендуется подход к формированию функционала.

При рассмотрении оптимальных моделей подъёма летательного аппарата (ЛА) в стартовое положение принята схема [1], показанная на рис. 1. Все элементы модели абсолютно твёрдые. Ветер отсутствует. На ресурсы ограничения не накладываются.

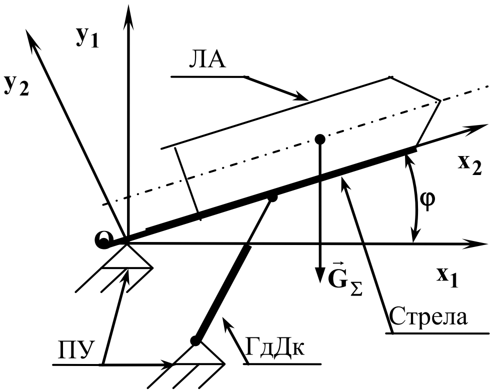

Рис. 1. Модель подъема ЛА

Движение рассматривается в неподвижной системе координат x_1oy_1, где ox_1 параллельна плоскости горизонтирования ПУ; x_2oy_2 - подвижная система координат, где ox_2 параллельна оси симметрии ЛА и связана с ним.

Процесс подъёма описывается фазовой координатой φ и её производными $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$. Величина $\ddot{\varphi}$ ограничивается допустимой поперечной перегрузкой $\left[n_{y_2}\right]$. Определяется поперечная перегрузка через силу, развиваемую ГдДк, или силы инерции и веса ПС [2]:

$$\mathbf{n}_{\mathbf{y}_2} = \left(\frac{\boldsymbol{l}_{\mathbf{цт}}}{\mathbf{g}} \ddot{\varphi} + \cos\varphi \right) \le \left[\mathbf{n}_{\mathbf{y}_2}\right], \tag{1}$$

где $l_{цт}$ – расстояние от точки **O** до центра тяжести ЛА, м; **g** – ускорение свободного падения, м/с^2; $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение подъёма, 1/с^2; $\left[n_{y_2}\right]$ – допустимая поперечная перегрузка.

Из (1) можно получить выражение для допустимых угловых ускорений

$$[\ddot{\varphi}] = \frac{g}{l_{цт}}\left(\left[n_{y_2}\right] - \cos\varphi\right). \tag{2}$$

Функция $[\ddot{\varphi}](\varphi)$ нелинейно возрастает на промежутке $\varphi \in (0; \pi/2)$ по закону, изображённому на рис. 2.

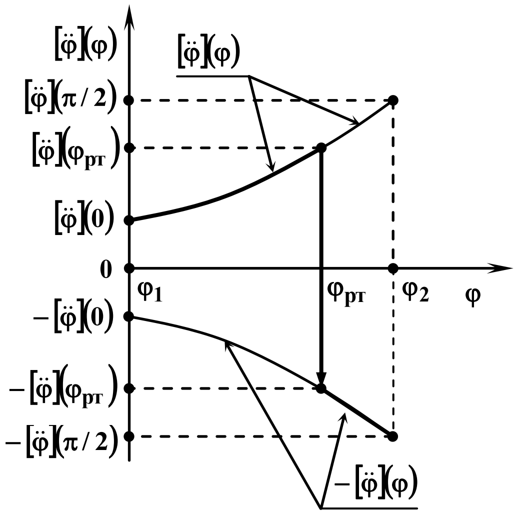

Рис. 2. Схема этапов подъема ЛА

Задача состоит в том, чтобы при заданных выше условиях найти стратегию такого управления, при которой критерий оптимальности $\mathbf{K}$ принимал бы экстремальное значение, в зависимости от требований к $\mathbf{K}$. Такая стратегия называется оптимальной [3].

Процесс подъёма ЛА в стартовое положение осуществляется с помощью объёмного гидропривода (ГдПр). Основными параметрами ГдПр являются давление жидкости $\mathbf{p_1}$ и расход жидкости $\mathbf{Q}$. Если учесть, что $\mathbf{p_1}$ зависит от нагрузки на шток и потерь энергии жидкости в магистрали, то единственным параметром, с помощью которого рационально управлять ГдПр, остаётся $\mathbf{Q}$.

Заметим, что на задачу оптимизации существенное влияние оказывает критерий оптимизации. Целесообразно отметить, что движение ПС может быть оптимизировано по ряду критериев: по быстродействию (минимальное время подъёма), по минимальной потребляемой мощности $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N} = \mathbf{p_1 Q}$), по ходу ГдДк (ход минимальный), по массе ГдДк (масса ГдДк минимальна) и т.д.

В данной статье в качестве критерия выбирается быстродействие. Как известно [3], при данной постановке задачи критерием оптимальности является время перехода системы из начального положения, которое описывается начальным значением фазовой координаты, в конечное положение. В теореме об $\mathbf{n}$ интервалах [3] доказано, что, если движение системы описывается дифференциальным уравнением второго порядка и на вторую производную наложено ограничение, то минимальное время движения системы из начального положения ($\varphi = \varphi_1$) в конечное ($\varphi = \varphi_2$) можно получить, двигаясь на двух интервалах: сначала на $\varphi_1 \le \varphi_{рт} \le \varphi_{рт}$ с ускорением $[\ddot{\varphi}](\varphi)$ (разгон), а затем на $\varphi_{рт} \le \varphi \le \varphi_2$ -

с ускорением $-[\ddot{\varphi}](\varphi)$ (торможение) (рис. 2), где $\varphi_{рт}$ - угол перехода от разгона к торможению, причём $\varphi_1 < \varphi_{рт} < \varphi_2 \le \pi/2$.

Пусть заданы $\ddot{\varphi}_р(\varphi)$ - функция или закон изменения углового ускорения разгона ПС и $\ddot{\varphi}_т(\varphi)$ - функция изменения углового ускорения торможения ПС, начальная и конечная угловые скорости подъёма $\dot{\varphi}(\varphi_1) = \dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}(\varphi_2) = \dot{\varphi}_2$. Функция $\ddot{\varphi}_р(\varphi)$ лежит выше оси $о\varphi$, а функция $\ddot{\varphi}_т(\varphi)$ ниже оси $о\varphi$ (рис. 2).

Первое, что необходимо определить, угол перехода ПС от разгона к торможению $\varphi_{рт}$. При разгоне угловое ускорение в точке $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_{рт}]$ равно значению заданной функции $\ddot{\varphi}_р(\varphi)$ в данной точке

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_р(\varphi). \tag{3}$$

Произведём замену переменных

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\tau} = \frac{d\dot{\varphi}}{\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}} = \frac{\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}}{d\varphi} \tag{4}$$

и подставив (4) в (3), получим

$$\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi. \tag{5}$$

Проинтегрируем (5)

$$\int_{\dot{\varphi}_1}^{\dot{\varphi}_{рт}} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi \tag{6}$$

и получим:

$$\frac{\dot{\varphi}_{рт}^2}{2} - \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi; \tag{7}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_{рт}^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}. \tag{8}$$

Если момент инерции ПС постоянен на промежутке $[\varphi_1; \varphi_{рт}]$, то площадь под кривой $\ddot{\varphi}_р(\varphi)$ на отрезке разгона равна кинетической энергии, сообщённой единице момента инерции ПС.

При торможении угловое ускорение в точке $\varphi \in [\varphi_{рт}; \varphi_2]$ равно значению заданной функции $\ddot{\varphi}_т(\varphi)$ в данной точке:

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_т(\varphi). \tag{9}$$

Подставив (4) в (9) и проинтегрируя обе части уравнения, получим

$$\int_{\dot{\varphi}_{рт}}^{\dot{\varphi}_2} \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \int_{\varphi_{рт}}^{\varphi_2} \ddot{\varphi}_т(\varphi) d\varphi \; . \tag{10}$$

После преобразований, аналогичных (7), получим

$$\frac{\dot{\varphi}_{рт}^2}{2} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \ddot{\varphi}_т(\varphi) d\varphi + \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} \; . \tag{11}$$

Если момент инерции ПС постоянен на промежутке $[\varphi_{рт}; \varphi_2]$, то площадь под кривой $\ddot{\varphi}_т(\varphi)$ на отрезке торможения равна кинетической энергии, отобранной у единицы момента инерции ПС. Приравняв правые части (8) и (11), получим уравнение для определения $\varphi_{рт}$:

$$\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi = -\int_{\varphi_{рт}}^{\varphi_2} \ddot{\varphi}_т(\varphi) d\varphi + \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} \; . \tag{12}$$

Заметим, что (12) является уравнением сохранения кинетической энергии единицы момента инерции ПС при постоянном моменте инерции от φ_1 до φ_2 .

Время подъёма ПС в стартовое положение $\tau_п$ определяется как

$$\tau_п = \tau_р - \tau_т \, . \tag{13}$$

Сформируем выражение для времени разгона $\tau_р$ ПС. Воспользуемся выражением (6). Для этого верхний предел интегрирования установим как произвольный, т. е. $\varphi_{рт} = \varphi$ и $\dot{\varphi}_{рт} = \dot{\varphi}$. Тогда

$$\int_{\dot{\varphi}_1}^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi \tag{14}$$

и после интегрирования получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi \, . \tag{15}$$

Откуда

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2\int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_1^2} \; ; \tag{16}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \sqrt{2\int_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_р(\varphi) d\varphi + \dot{\varphi}_1^2} \tag{17}$$

или

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_p(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi. \tag{18}$$

Время нахождения ПС в фазовой координате φ_1 обозначим τ_1, в $\varphi_{рт}$ – $\tau_{рт}$. Откуда $\tau_p = \tau_{рт} - \tau_1$. Из критерия оптимальности процесса разгона по быстродействию с учётом (18) следует

$$\tau_p = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_{рт}} d\tau = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_p(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi. \tag{19}$$

Для определения времени торможения $\tau_т = \tau_2 - \tau_{рт}$ запишем (10) как

$$\int\limits_{\dot{\varphi}_{рт}}^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_т(\varphi)d\varphi, \tag{20}$$

где верхний предел переменной равен φ и $\dot{\varphi}$. Производя для процесса торможения преобразования, аналогичные (15) - (18), получим:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2\int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_т(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_{рт}^2}; \tag{21}$$

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_т(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_{рт}^2}} d\varphi. \tag{22}$$

Из критерия быстродействия

$$\tau_т = \int\limits_{\tau_{рт}}^{\tau_2} d\tau = \int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_т(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_{рт}^2}} d\varphi. \tag{23}$$

Сложим уравнения (19) и (23) и получим выражение для определения времени подъёма $\tau_п$:

$$\tau_п = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_{рт}} d\tau + \int\limits_{\tau_{рт}}^{\tau_2} d\tau = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_p(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi + \int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_т(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_{рт}^2}} d\varphi. \tag{24}$$

Итак, в правой части (24) находится функционал, являющийся критерием оптимальности при рассмотрении оптимального по быстродействию переходного процесса системы из одной фазовой координаты в другую. Для решения задачи оптимизации процесса подъёма ЛА необходимо минимизировать функционал

$$\overline{\mathbf{K}}_{\tau} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_{рт}} \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi} \ddot{\varphi}_{р}(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_1^2}} d\varphi + \int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi} \ddot{\varphi}_{т}(\varphi)d\varphi + \dot{\varphi}_{рт}^2}} d\varphi . \qquad (25)$$

При разгоне и торможении по границе (2) для функций разгона и торможения получим

$$\ddot{\varphi}_{р,т}(\varphi) = \pm[\ddot{\varphi}](\varphi) = \pm \frac{g}{l_{цт}}\left(\left[n_{y_2}\right] - \cos\varphi\right). \qquad (26)$$

И, если $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$, то функционал $\overline{\mathbf{K}}_{\tau}$ приобретёт вид

$$\overline{\mathbf{K}}_{\tau} = \sqrt{\frac{l_{цт}}{2g}}\left(\int\limits_{0}^{\varphi_{рт}} \frac{1}{\sqrt{\left[n_{y_2}\right]\varphi - \sin\varphi}} d\varphi + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{\left[n_{y_2}\right](\varphi_{рт} - \varphi) + \sin\varphi - \sin\varphi_{рт} + \dot{\varphi}_{рт}^2}} d\varphi \right). \qquad (27)$$

Значение $\varphi_{рт}$ можно определить из (12) с учётом (26):

$$\frac{g}{l_{цт}} \int\limits_{0}^{\varphi_{рт}} \left(\left[n_{y_2}\right] - \cos\varphi\right) d\varphi = \frac{g}{l_{цт}} \int\limits_{\varphi_{рт}}^{\varphi_2} \left(\left[n_{y_2}\right] - \cos\varphi\right) d\varphi . \qquad (28)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Конофеев Н.Т. Транспортировка ракет. – М.: Воениздат, 1978. – 150 с.
2. Олейник Ю.А., Прокопов В.А. К оценке параметров подъёма летательного аппарата в стартовое положение // Системы обработки информации. – ХФВ «Транспорт Украины», 2000. – Вып. 4(10). – 212 с.
3. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966. – 263 с.

Поступила в редколлегию 24.09.2001