УДК 517.91

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Е.Б. Ахиезер, д.т.н., проф. Е.Л. Пиротти

При помощи спектральной теории систем коммутирующих операторов получены аналитические представления основных вероятностных характеристик случайных векторных полей. С помощью операторов с дискретным и непрерывным спектром получен общий вид корреляционной матрицы нестационарных векторных полей.

Целый ряд прикладных задач математического моделирования в теории управления сложными системами, в теории фильтрации сложных сигналов, в электродинамических задачах о рассеянии электромагнитных полей в статистически неоднородных средах требует разработки методов аналитического описания вероятностных характеристик нестационарных случайных векторных полей. Фактически спектральная теория неоднородных векторных случайных полей отсутствует. В данной работе рассматривается один из возможных вариантов решения указанной задачи.

Рассмотрим векторный эволюционно представимый случайный процесс второго порядка [1] $\vec{\mathbf{z}}\,(\mathbf{t})=\{\mathbf{z_1(t)},\ \mathbf{z_2(t)}\}$ с нулевым средним значением $\mathbf{M[z_n(t)]=0}$, где $\mathbf{z_n(t)}$, $(\mathbf{n=1,2})$ имеют вид

$$\mathbf{z_n(t)=e^{iAt}z_{0n}},\tag{1}$$

где $\mathbf{z_{0n}}$ - амплитуды векторных кривых; $\mathbf{t}$ - время; $\mathbf{A}$ - диссипативный оператор.

В этом случае $\vec{\mathbf{z}}\,(\mathbf{t})$ будем называть диссипативной векторной кривой.

Введем корреляционную матрицу $\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{t,s})$, элементы которой определим с помощью формулы

$$\mathbf{W_{n,p}(t,s)}=-\left.\frac{\partial \mathbf{K_{n,p}(t+\tau,s+\tau)}}{\partial\tau}\right|_{\tau=0},\tag{2}$$

где

$$\mathbf{K_{n,p}}=\left\langle \mathbf{z_n(t), z_p(t)}\right\rangle,\quad \mathbf{(n,p=1,2)}.\tag{3}$$

Из определения корреляционной матрицы для случайной диссипативной векторной кривой $\vec{\mathbf{z}}(\mathbf{t})$ получаем

$$\mathbf{K}_{n,p}(t,s)=\int_0^{\infty}\mathbf{W}_{n,p}(t+\tau,s+\tau)\partial\tau\,. \tag{4}$$

Таким образом, по корреляционной матрице $\hat{\mathbf{W}}(t,s)$ элементы $\hat{\mathbf{K}}(t,s)$ восстанавливаются однозначно.

Для случайного эволюционно представимого векторного процесса (1) корреляционная матрица имеет вид

$$\hat{\mathbf{W}}(t,s)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\overline{\varphi_1(t)} & \varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}\\ \varphi_2(t)\overline{\varphi_1(t)} & \varphi_2(t)\overline{\varphi_2(t)}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\varphi_n(t)$ $(n = 1,\ 2)$ определяется выражением

$$\varphi_n(t)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}e^{it\lambda}<z_{0n},\left(A^*-\overline{\lambda}I\right)^{-1}g>d\lambda\,; \tag{6}$$

γ – контур, содержащий внутри себя спектр оператора **A**; **g** – каналовый элемент оператора **A**.

При более детальных предположениях о спектре оператора $\mathbf{A}^*$ рассмотрим, какими должны быть $\varphi_n(t)$.

Пусть оператор **A** имеет чисто дискретный спектр [2]:

$$(A^*f)(k)=\lambda_k f_k+i\sum_{s=k+1}^{NN}f(s)\beta_s\beta_k\,, \tag{7}$$

где $\lambda_k=\alpha_k+i\dfrac{\beta_k^2}{2}$ – собственные числа оператора $\mathbf{A}^*$.

В этом случае $\varphi_n(t)$ можно представить следующим образом:

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{0n}(k)\left\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}e^{it\lambda}h^{(k)}(\lambda)d\lambda\right\}, \tag{8}$$

где

$$h^{(k)}(\lambda)=\frac{\beta_k}{\overline{\lambda_k}-\lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda_j-\lambda}{\overline{\lambda_j}-\lambda}\,. \tag{9}$$

Следовательно, $\varphi_n(t)$ – функция, которая однозначно строится по спектру оператора A^*.

Пусть теперь оператор **A** является ограниченным диссипативным с непрерывным спектром [2]:

$$(A^*f)(x) = \alpha(x)f(x) + i\int_x^1 f(t)dt, \tag{10}$$

где $\alpha(x) = \overline{\alpha(x)}$ – кусочно - непрерывная функция с конечным числом разрывов.

Тогда $\varphi_n(t)$ – можно представить в виде

$$\varphi_n(t) = \int_0^1 f_{0n}(x)F(x,t)dx, \tag{11}$$

где

$$F(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{it\lambda}\frac{\Phi^-(0,x,\lambda)}{\alpha(x)-\lambda}d\lambda, \tag{12}$$

$$\Phi^-(0,x,\lambda) = e^{-i\int_0^x \frac{d\xi}{\alpha(\xi)-\lambda}}. \tag{13}$$

Рассмотрим частные случаи в процессе определения выражения $\varphi_n(t)$.

Пусть **A** – вольтерров оператор, т.е. его спектр сосредоточен в нуле

$$(A^*f)(x) = i\int_x^1 f(t)dt. \tag{14}$$

В этом случае функция **F(x,t)** (12) имеет вид

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{i\left(t\lambda - \frac{x}{\lambda}\right)}}{\lambda}d\lambda. \tag{15}$$

Вычисляя интеграл (15) при помощи вычетов, получаем

$$F(x,t) = J_0\left(2\sqrt{tx}\right), \tag{16}$$

где $J_0\left(2\sqrt{tx}\right)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка [3].

Таким образом, интересующая нас функция $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2)$ имеет вид

$$\varphi_n(t) = \int_0^1 J_0\left(2\sqrt{tx}\right) f_{0n} dx. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha(x) = \alpha_0$. Тогда оператор A^* определяется соотношением

$$(A^* f)(x) = \alpha_0 f(x) + i\int_x^1 f(t)dt. \tag{18}$$

При этом функция $F(x, t)$ примет вид

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{i\left(t\lambda - \frac{x}{\alpha_0 - \lambda}\right)}}{\alpha_0 - \lambda} d\lambda. \tag{19}$$

Вычисляя с помощью вычетов данный интеграл, получим

$$F(x,t) = e^{it\alpha_0} J_0\left(2\sqrt{tx}\right). \tag{20}$$

Таким образом,

$$\varphi_n(t) = e^{it\alpha_0}\int_0^1 J_0\left(2\sqrt{tx}\right) f_{0n}(x) dx. \tag{21}$$

Приведенные выше примеры показывают, что предложенная методика позволяет находить элементы корреляционной матрицы в случае неоднородных векторных случайных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 182 с.

2. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: ХГУ, 1971. – 160 с.

3. Никифоров А.Ф., Уваров В.В. Основы теории специальных функций. – М.: Наука, 1974. – 304 с.

Поступила в редколлегию 02.10.2001