

ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМИЗИРУЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ

А.И. Баленко, Н.И. Заполовский
(представил д.т.н., проф. В.Д. Дмитриенко)

Рассмотрены вопросы, связанные с синтезом оптимальной системы управления электроприводом переменного тока. Предложена методика выбора коэффициентов оптимизирующего функционала.

При разработке современных систем управления сложными техническими объектами, к которым можно отнести, например, систему управления электроприводом переменного тока дизель - поезда, широкое применение нашли методы анализа и синтеза, в основу которых положены оптимальные и адаптивные принципы управления.

Одним из наиболее эффективных современных методов синтеза оптимальных систем управления является метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы (АКОР) [1].

Так, для объекта, описываемого уравнениями

$$\dot{X}_i + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{j=1}^m \Phi_{ij}(x_1, \dots, x_n, t) U_j, (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q(x_1, \dots, x_n, t) dt + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{U_j}{K_j} \right)^q dt + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left(K_j^p \sum \Phi_{kj} \frac{\partial V}{\partial X_k} \right)^p dt, \quad (2)$$

где V – решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = -Q \quad (3)$$

при граничном условии $V_{t=t_2} = V_3$ являются управления

$$U_j = -K_j^p \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \frac{\partial V}{\partial x_k} \right)^{p-1}. \quad (4)$$

Здесь f_i , φ_{ij} – заданные непрерывные функции (характеристики) объекта; Q , V_3 – положительно определенные заданные непрерывные функции; p , q – положительные заданные числа, удовлетворяющие соотношению $\frac{1}{p+q} = 1$ и такие, что Z^p , Z^q – четные функции Z .

При нахождении оптимальных управлений для нелинейного объекта с аналитическими характеристиками положительно определенные функции Q , V_3 минимизируемого функционала в общем случае задаются в виде степенных рядов:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^n \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^n \beta_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + \dots; \quad (5)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} x_i x_j + \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^n \rho_{ijk} x_i x_j x_k + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^n \rho_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + \dots, \quad (6)$$

где β_{ij} , β_{ijk} , ... – постоянные величины или функции времени, не меняющиеся при перестановке индексов; ρ_{ij} , ρ_{ijk} , ... – постоянные величины, одинаковые при любом расположении индексов, методика выбора которых методом АКОР не определена. Это является одним из существенных недостатков метода, что привело к определенным трудностям при синтезе сложных технических систем управления.

В данной работе предлагается один из возможных подходов к устранению в какой-то мере имеющегося недостатка, заключающийся в разработке методики выбора коэффициентов β_{ij} , β_{ijk} , ... и ρ_{ij} , ρ_{ijk} , ... оптимизирующего функционала (2).

Идея методики заключается в следующем. Пусть функции Q , V_3 представлены в виде квадратичной формы, что не противоречит основной теореме метода АКОР и такое представление может быть использовано при синтезе системы управления электроприводом дизель – поезда:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j; \quad (7)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} x_i x_j, \quad (8)$$

где x_i и x_j – фазовые координаты объекта управления.

Согласно [1] функции Q и V_3 – положительно определены. Это требование положено в основу выработки методики выбора коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij} .

Для установления характера квадратичной формы (положительно или отрицательно определенной) имеется ряд методов, один из них - это метод Лагранжа.

Пусть имеется квадратичная форма

$$\chi = \bar{X}^T \cdot A \cdot \bar{X} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j . \quad (9)$$

Здесь \bar{X} - n -компонентный вектор; A – симметрическая неособенная матрица размерности n^2 . Известно, что существуют такие линейные преобразования координат, которые позволяют выразить квадратичную форму через новые переменные $\bar{\xi}$ в виде суммы полных квадратов. Причем такие преобразования не меняют характера квадратичной формы

$$\bar{\chi} = \sum_{k=1}^n b_k \xi_k^2 . \quad (10)$$

Из (10) следует, что, если все коэффициенты квадратичной формы (10) положительны (отрицательны), то квадратичная форма положительно (отрицательно) определена.

Проделав над квадратичной формой указанные линейные преобразования, можно легко определить характер стационарной точки функции Q и V_3 . С вычислительной стороны эти преобразования сводятся к преобразованиям матрицы A к диагональному виду, что позволяют выполнить современные пакеты прикладных программ.

Рассмотрим функцию Q для случая четырех фазовых переменных X_i ($i = \overline{1,4}$). Тогда

$$\begin{aligned} Q = & \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{33} X_3^2 + \beta_{44} X_4^2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \\ & + \beta_{14} X_1 X_4 + \beta_{21} X_2 X_1 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{24} X_2 X_4 + \beta_{31} X_3 X_1 + \\ & + \beta_{32} X_3 X_2 + \beta_{34} X_3 X_4 + \beta_{41} X_4 X_1 + \beta_{42} X_4 X_2 + \beta_{43} X_4 X_3 . \end{aligned} \quad (11)$$

Построим матрицу Гесса (матрицу коэффициентов вторых частных производных функции Q).

При условии, что $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ ($i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,4}$), матрица Гесса имеет следующий вид:

$$H = 2 \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{12} & \beta_{21} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} & \beta_{44} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Согласно критерию Сильвестра, квадратическая форма (9) положительно определена в том случае, если все главные определители матрицы (12) положительны. Следовательно, используя данный критерий, можем найти соотношения для выбора значений β_{ij} (аналогично и ρ_{ij}) оптимизирующего функционала (точнее, для установления связи между коэффициентами β_{ij}). Найдя все главные определители матрицы (12), можем записать соотношения, которые устанавливают связь между значениями коэффициентов β_{ij} .

Из первого главного определителя следует, что

$$\beta_{11} > 0. \quad (13)$$

Из второго главного определителя следует

$$\beta_{11} \beta_{22} > \beta_{12}^2. \quad (14)$$

Из условия (13) следует, что коэффициент β_{22} должен быть положительным и выполняться неравенство (14).

Рассмотрим главный определитель третьего порядка. При этом примем во внимание, что при представлении функции Q в виде

$$Q = \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{33} X_3^2 + \beta_{44} X_4^2 \quad (15)$$

согласно критерию Сильвестра, данная функция будет положительно определена при условии, что все β_{ij} ($i, j = 1, 4$) положительны.

Найдем главный определитель третьего порядка Δ_3 :

$$\Delta_3 = (\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} + \beta_{12}\beta_{13}\beta_{23} + \beta_{12}\beta_{13}\beta_{23}) - (\beta_{12}^2\beta_{33} + \beta_{13}^2\beta_{22} + \beta_{23}^2\beta_{11}) > 0. \quad (16)$$

Поскольку вторая часть выражения (16) при любых значениях β_{12} , β_{13} , β_{23} (при условии, что $\beta_{11} > 0$; $\beta_{22} > 0$; $\beta_{33} > 0$) больше нуля, то можем записать ряд условий, выполнение которых обеспечивает положительную определенность квадратичной формы:

$$(\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} + 2\beta_{12}\beta_{13}\beta_{23}) > (\beta_{12}^2\beta_{33} + \beta_{13}^2\beta_{22} + \beta_{23}^2\beta_{11}) > 0; \quad (17)$$

$$\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} < 2\beta_{12}\beta_{13}\beta_{23}; \quad (18)$$

$$\beta_{12}\beta_{13}\beta_{23} > 0. \quad (19)$$

Найдем главный определитель четвертого порядка Δ_4 , который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & [(\beta_{22}\beta_{33}\beta_{44} + 2\beta_{23}\beta_{24}\beta_{34}) - (\beta_{23}^2\beta_{44} + \beta_{24}^2\beta_{33} + \beta_{34}^2\beta_{22})] - \\ & - \beta_{12}[(\beta_{12}\beta_{33}\beta_{44} + \beta_{13}\beta_{24}\beta_{34} + \beta_{14}\beta_{23}\beta_{34}) - (\beta_{12}\beta_{24}\beta_{33} + \\ & + \beta_{13}\beta_{24}\beta_{34} + \beta_{34}^2\beta_{12})] + \beta_{13}[(\beta_{12}\beta_{23}\beta_{44} + \beta_{14}\beta_{34}\beta_{22} + \\ & + \beta_{13}^2\beta_{24}^2) - (\beta_{14}\beta_{23}\beta_{24} + \beta_{13}\beta_{22}\beta_{44} + \beta_{24}\beta_{34}\beta_{12})] - \beta_{14}[(\beta_{12}\beta_{24}\beta_{33} + \\ & + \beta_{13}\beta_{23}\beta_{24} + \beta_{22}\beta_{33}\beta_{14}) - (\beta_{14}\beta_{23}^2 + \beta_{13}\beta_{22}\beta_{34} + \beta_{24}\beta_{33}\beta_{12})]. \end{aligned} \quad (20)$$

Записать ряд условий, как это было сделано на основании определителя третьего порядка, в данном случае не представляется возможным. Однако выражение (20) может быть использовано для нахождения условия, определяющего значение коэффициентов β_{14} , β_{24} , β_{34} при известных коэффициентах β_{11} , β_{12} , β_{13} , β_{23} , β_{22} , β_{33} , β_{44} , выбор которых определяется условиями (13) - (15), (17) - (19).

Аналогично можно поступить и при определении коэффициентов β_{ij} ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{5,6, \dots, n}$).

Таким образом, приведенные соотношения дают возможность уменьшить число вариантов “подбора” коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij} , обеспечивающих минимизацию функционала (2), и тем самым позволяют в какой-то мере преодолеть один из отмеченных недостатков метода АКОР.

Приведенная методика по выбору коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij} использована при синтезе оптимальной системы управления электроприводом переменного тока дизель - поезда, описываемого системой нелинейных дифференциальных уравнений пятого порядка. Моделирование синтезированной системы подтвердило ее работоспособность и показало целесообразность использования предложенной методики для выбора коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij} для случая, когда функции Q и V_3 заданы в виде квадратичной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с.

Поступила в редколлегию 02.10 2001