УДК 62-52:621.325.2-833

ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМИЗИРУЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ

А.И. Баленко, Н.И. Заполовский
(представил д.т.н., проф. В.Д. Дмитриенко)

Рассмотрены вопросы, связанные с синтезом оптимальной системы управления электроприводом переменного тока. Предложена методика выбора коэффициентов оптимизирующего функционала.

При разработке современных систем управления сложными техническими объектами, к которым можно отнести, например, систему управления электроприводом переменного тока дизель - поезда, широкое применение нашли методы анализа и синтеза, в основу которых положены оптимальные и адаптивные принципы управления.

Одним из наиболее эффективных современных методов синтеза оптимальных систем управления является метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы (АКОР) [1].

Так, для объекта, описываемого уравнениями

$$\dot{X}_i + f_i(x_1,..x_n,t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x_1,..x_n,t)U_j, (i=\overline{1,n}), \tag{1}$$

оптимальными в смысле минимума функционала

$$\begin{aligned} I = V_3[x_1(t_2),..x_n(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q(x_1,..x_n,t)dt + \\ + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{U_j}{K_j}\right)^q dt + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(K_j^p \sum \varphi_{kj}\frac{\partial V}{\partial X_k}\right)^p dt, \end{aligned} \tag{2}$$

где **V** – решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = -Q \tag{3}$$

при граничном условии $V_{t=t2} = V_3$ являются управления

$$\mathbf{U_j = -K_j^p \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{Ki} \frac{\partial V}{\partial x_K} \right)^{p-1}} . \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{f_i}$, $\boldsymbol{\varphi_{ij}}$ - заданные непрерывные функции (характеристики) объекта; $\mathbf{Q}$, $\mathbf{V_3}$ – положительно определенные заданные непрерывные функции; $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ – положительные заданные числа, удовлетворяющие соотношению $\mathbf{\frac{1}{p+q} = 1}$ и такие, что $\mathbf{Z^p}$, $\mathbf{Z^q}$ – четные функции $\mathbf{Z}$.

При нахождении оптимальных управлений для нелинейного объекта с аналитическими характеристиками положительно определенные функции $\mathbf{Q}$, $\mathbf{V_3}$ минимизируемого функционала в общем случае задаются в виде степенных рядов:

$$\mathbf{Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j + \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^{n} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,\mathit{l}=1}^{n} \beta_{ijk\mathit{l}} x_i x_j x_k x_{\mathit{l}} + \ldots} ; \qquad (5)$$

$$\mathbf{V_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij} x_i x_j + \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^{n} \rho_{ijk} x_i x_j x_k + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,\mathit{l}=1}^{n} \rho_{ijk\mathit{l}} x_i x_j x_k x_{\mathit{l}} + \ldots} , \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{\beta_{ij}}$, $\boldsymbol{\beta_{ijk}}$, ... – постоянные величины или функции времени, не меняющиеся при перестановке индексов; $\boldsymbol{\rho_{ij}}$, $\boldsymbol{\rho_{ijk}}$, ... - постоянные величины, одинаковые при любом расположении индексов, методика выбора которых методом АКОР не определена. Это является одним из существенных недостатков метода, что привело к определенным трудностям при синтезе сложных технических систем управления.

В данной работе предлагается один из возможных подходов к устранению в какой-то мере имеющегося недостатка, заключающийся в разработке методики выбора коэффициентов $\boldsymbol{\beta_{ij}, \beta_{ijk}, \ldots}$ и $\boldsymbol{\rho_{ij}, \rho_{ijk}, \ldots}$ оптимизирующего функционала (2).

Идея методики заключается в следующем. Пусть функции $\mathbf{Q}$, $\mathbf{V_3}$ представлены в виде квадратичной формы, что не противоречит основной теореме метода АКОР и такое представление может быть использовано при синтезе системы управления электроприводом дизель - поезда:

$$\mathbf{Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j} ; \qquad (7)$$

$$\mathbf{V_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij} x_i x_j} , \qquad (8)$$

где $\mathbf{x_i}$ и $\mathbf{x_j}$ – фазовые координаты объекта управления.

Согласно [1] функции $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{V_3}$ – положительно определены. Это требование положено в основу выработки методики выбора коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij}.

Для установления характера квадратичной формы (положительно или отрицательно определенной) имеется ряд методов, один из них - это метод Лагранжа.

Пусть имеется квадратичная форма

$$\chi = \overline{\mathbf{X}}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j \ . \tag{9}$$

Здесь $\overline{\mathbf{X}}$ - $\mathbf{n}$-компонентный вектор; $\mathbf{A}$ – симметрическая неособенная матрица размерности $\mathbf{n}^2$. Известно, что существуют такие линейные преобразования координат, которые позволяют выразить квадратичную форму через новые переменные $\overline{\xi}$ в виде суммы полных квадратов. Причем такие преобразования не меняют характера квадратичной формы

$$\overline{\chi} = \sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k^2 \ . \tag{10}$$

Из (10) следует, что, если все коэффициенты квадратичной формы (10) положительны (отрицательны), то квадратичная форма положительно (отрицательно) определена.

Проделав над квадратичной формой указанные линейные преобразования, можно легко определить характер стационарной точки функции $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{V_3}$. С вычислительной стороны эти преобразования сводятся к преобразованиям матрицы $\mathbf{A}$ к диагональному виду, что позволяют выполнить современные пакеты прикладных программ.

Рассмотрим функцию $\mathbf{Q}$ для случая четырех фазовых переменных $\mathbf{X_i}$ ($\mathbf{i = \overline{1,4}}$). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = {} & \beta_{11}X_1^2 + \beta_{22}X_2^2 + \beta_{33}X_3^2 + \beta_{44}X_4^2 + \beta_{12}X_1X_2 + \beta_{13}X_1X_3 + \\ & + \beta_{14}X_1X_4 + \beta_{21}X_2X_1 + \beta_{23}X_2X_3 + \beta_{24}X_2X_4 + \beta_{31}X_3X_1 + \\ & + \beta_{32}X_3X_2 + \beta_{34}X_3X_4 + \beta_{41}X_4X_1 + \beta_{42}X_4X_2 + \beta_{43}X_4X_3 . \end{aligned} \tag{11}$$

Построим матрицу Гесса (матрицу коэффициентов вторых частных производных функции $\mathbf{Q}$).

При условии, что $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ ($\mathbf{i = \overline{1,4}}$; $\mathbf{j = \overline{1,4}}$), матрица Гесса имеет следующий вид:

$$\mathbf{H} = 2\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{12} & \beta_{21} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} & \beta_{44} \end{Vmatrix}. \qquad (12)$$

Согласно критерию Сильвестра, квадратическая форма (9) положительно определена в том случае, если все главные определители матрицы (12) положительны. Следовательно, используя данный критерий, можем найти соотношения для выбора значений β_{ij} (аналогично и ρ_{ij}) оптимизирующего функционала (точнее, для установления связи между коэффициентами β_{ij}). Найдя все главные определители матрицы (12), можем записать соотношения, которые устанавливают связь между значениями коэффициентов β_{ij}.

Из первого главного определителя следует, что

$$\beta_{11} > 0. \qquad (13)$$

Из второго главного определителя следует

$$\beta_{11}\,\beta_{22} > \beta_{12}^2\,. \qquad (14)$$

Из условия (13) следует, что коэффициент β_{22} должен быть положительным и выполняться неравенство (14).

Рассмотрим главный определитель третьего порядка. При этом примем во внимание, что при представлении функции $\mathbf{Q}$ в виде

$$\mathbf{Q} = \beta_{11}X_1^2 + \beta_{22}X_2^2 + \beta_{33}X_3^2 + \beta_{44}X_4^2 \qquad (15)$$

согласно критерия Сильвестра, данная функция будет положительно определена при условии, что все β_{ij} ($\mathbf{i},\mathbf{j} = \overline{\mathbf{1{,}4}}$) положительны.

Найдем главный определитель третьего порядка Δ_3 :

$$\begin{aligned} \Delta_3 = (\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} + \beta_{12}\beta_{13}\beta_{23} + \beta_{12}\beta_{13}\beta_{23}) - \\ - \left(\beta_{12}^2\beta_{33} + \beta_{13}^2\beta_{22} + \beta_{23}^2\beta_{11}\right) > 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Поскольку вторая часть выражения (16) при любых значениях β_{12}, β_{13}, β_{23} (при условии, что $\beta_{11} > 0$; $\beta_{22} > 0$; $\beta_{33} > 0$) больше нуля, то можем записать ряд условий, выполнение которых обеспечивает положительную определенность квадратичной формы:

$$(\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} + 2\beta_{12}\beta_{13}\beta_{23}) > \left(\beta_{12}^2\beta_{33} + \beta_{13}^2\beta_{22} + \beta_{23}^2\beta_{11}\right) > 0\,; \qquad (17)$$

$$\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} < 2\beta_{12}\beta_{13}\beta_{23}\,; \qquad (18)$$

$$\beta_{12}\beta_{13}\beta_{23} > 0. \tag{19}$$

Найдем главный определитель четвертого порядка Δ_4, который имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\Delta_4 = [(\beta_{22}\beta_{33}\beta_{44} + 2\beta_{23}\beta_{24}\beta_{34}) - (\beta_{23}^2\beta_{44} + \beta_{24}^2\beta_{33} + \beta_{34}^2\beta_{22})] - \\ -\beta_{12}[(\beta_{12}\beta_{33}\beta_{44} + \beta_{13}\beta_{24}\beta_{34} + \beta_{14}\beta_{23}\beta_{34}) - (\beta_{12}\beta_{24}\beta_{33} + \\ +\beta_{13}\beta_{24}\beta_{34} + \beta_{34}^2\beta_{12})] + \beta_{13}[(\beta_{12}\beta_{23}\beta_{44} + \beta_{14}\beta_{34}\beta_{22} + \\ +\beta_{13}^2\beta_{24}^2) - (\beta_{14}\beta_{23}\beta_{24} + \beta_{13}\beta_{22}\beta_{44} + \beta_{24}\beta_{34}\beta_{12})] - \beta_{14}[(\beta_{12}\beta_{24}\beta_{33} + \\ +\beta_{13}\beta_{23}\beta_{24} + \beta_{22}\beta_{33}\beta_{14}) - (\beta_{14}\beta_{23}^2 + \beta_{13}\beta_{22}\beta_{34} + \beta_{24}\beta_{33}\beta_{12})].\end{gathered} \tag{20}$$

Записать ряд условий, как это было сделано на основании определителя третьего порядка, в данном случае не представляется возможным. Однако выражение (20) может быть использовано для нахождения условия, определяющего значение коэффициентов β_{14}, β_{24}, β_{34} при известных коэффициентах β_{11}, β_{12}, β_{13}, β_{23}, β_{22}, β_{33}, β_{44}, выбор которых определяется условиями (13) - (15), (17) - (19).

Аналогично можно поступить и при определении коэффициентов β_{ij} ($i = \overline{1,4}$, $j = 5, 6, .., n$).

Таким образом, приведенные соотношения дают возможность уменьшить число вариантов “подбора” коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij}, обеспечивающих минимизацию функционала (2), и тем самым позволяют в какой-то мере преодолеть один из отмеченных недостатков метода АКОР.

Приведенная методика по выбору коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij} использована при синтезе оптимальной системы управления электроприводом переменного тока дизель - поезда, описываемого системой нелинейных дифференциальных уравнений пятого порядка. Моделирование синтезированной системы подтвердило ее работоспособность и показало целесообразность использования предложенной методики для выбора коэффициентов β_{ij} и ρ_{ij} для случая, когда функции $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{V_3}$ заданы в виде квадратичной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с.

Поступила в редколлегию 02.10 2001