УДК 519.86

ПРИНЦИП ХИКСА МАКСИМУМА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПРИРАЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОГНУТОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА

Е.В. Гулынина
(представил д.т.н., проф. Н.И. Корсунов)

В работе получен полный аналог принципа Хикса для более широкого класса задач, а именно, для нелинейных алгебраических уравнений с вогнутой нелинейностью и нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна, что играет важную роль в математической экономике.

В [1] рассмотрено развитие известного принципа Хикса на случай систем линейных алгебраических уравнений и линейных интегральных уравнений.

В этой статье приведено развитие принципа Хикса для системы нелинейных алгебраических уравнений и для нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна с вогнутой нелинейностью.

1. Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j(x_1,\dots,x_n) + f_i\,, \qquad (i=\overline{1,n})}\,, \tag{1}$$

в которой $\mathbf{a_{ij}}$ - заданные неотрицательные коэффициенты; $\mathbf{f_i}$ - заданные неотрицательные свободные члены; $\mathbf{x_i}$ $\mathbf{(i=\overline{1,n})}$ - неизвестные; $\mathbf{F_j(x_1,x_2,\dots,x_n)}$ - непрерывно дифференцируемые по $\mathbf{x_i}$ $\mathbf{(i=\overline{1,n})}$ функции, монотонно возрастающие по каждой из переменных $\mathbf{x_1,x_2,\dots,x_n}$ и вогнутые по этим переменным, т.е.

$$\mathbf{F_j(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) \ge \lambda F_j(x_1,x_2,\dots,x_n)} \tag{2}$$

для всех $\mathbf{\lambda \in [0,1]}$ и

$$\mathbf{F_j(x_1,x_2,\dots,x_n) - F_j(y_1,y_2,\dots,y_n) \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j(y_1,y_2,\dots,y_n)}{\partial x_i} \cdot (x_i - y_i)} \tag{3}$$

для всех $\mathbf{j=\overline{1,n}}$ и $\mathbf{(x_1,x_2,\dots,x_n)}$, $\mathbf{(y_1,y_2,\dots,y_n)}$ $\mathbf{\in R_t^n}$.

Для таких систем в [2] доказана теорема существования единственного неотрицательного решения для любого набора неотрицательных свободных членов $(\mathbf{f_1, f_2, \ldots, f_n})$. При этом, если в (1) свободные члены $(\mathbf{f_1, f_2, \ldots, f_n})$ заменить на $(\mathbf{f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}})$, $\mathbf{f_i^{(1)} \geq f_i}$ $(\mathbf{i = \overline{1,n}})$, где $\mathbf{f_i^{(1)} \neq f_i}$ хотя бы для одного $\mathbf{i = \overline{1,n}}$, то решение $(\mathbf{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}})$ новой системы уравнений будет связано с решением $(\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n})$ системы (1) неравенствами

$$\mathbf{x_i^{(1)} \geq x_i \quad (i = \overline{1,n})}.$$

Более того, в случае неразложимой матрицы

$$\mathbf{A = (a_{ij}) \qquad (i, j = \overline{1,n})} \tag{4}$$

будут иметь место строгие неравенства

$$\mathbf{x_i^{(1)} > x_i \quad (i = \overline{1,n})}.$$

Это следует из того, что вектор $\mathbf{y=(x^{(1)}- x)}$ будет являться решением следующей линейной системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) y_j + (f_i^{(1`)} - f_i) \qquad (i = \overline{1,n})}$$

с неотрицательной и неразложимой матрицей

$$\left(\mathbf{a_{ij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}} \right). \tag{5}$$

Неразложимость этой матрицы следует из неразложимости матрицы (4) и положительности элементов матрицы

$$\left(\mathbf{\frac{\partial F_j}{\partial x_i}} \right) \mathbf{(i, j = \overline{1,n})}.$$

Введем в рассмотрение множества

$$\mathbf{\omega_0 = \left\{ i : f_i^{(1)} > f_i \right\}}; \tag{6}$$

$$\mathbf{\omega_1 = \left\{ i : \frac{x_i^{(1)} - x_i}{x_i} = \max_{j=\overline{1,n}} \frac{x_j^{(1)} - x_j}{x_j} \right\}_i}, \tag{7}$$

т.е. $\mathbf{\omega_0}$ - это носитель вектора $(\mathbf{f^{(1)}- f})$, а $\mathbf{\omega_1}$ - множество тех индексов $\mathbf{i}$ $(\mathbf{i = \overline{1,n}})$, на которых достигается максимум относительного приращения решения нелинейной системы (1) при переходе от свободных членов $(\mathbf{f_1, f_2, \ldots, f_n})$ к свободным членам $(\mathbf{f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_n^{(1)}})$.

Следующая теорема является полным аналогом доказанного для случая линейной системы алгебраических уравнений принципа Хикса максимума относительного приращения решения системы в случае нелинейной системы алгебраических уравнений с вогнутой нелинейностью.

Теорема 1. При переходе от системы уравнений (1) со свободными членами $\{f_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ к системе со свободными членами $\{f_i^{(1)}\}$ $(i=\overline{1,n})$, где

$$f_i^{(1)} \geq f_i \quad (i=\overline{1,n})$$

максимум относительного приращения решения достигается, по крайней мере, на одном из индексов системы индексов, т.е.

$$\omega_1 \cap \omega_0 \neq \varnothing.$$

При этом доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 2 дальнейшего изложения.

2. Рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна

$$x(t) = \int_{\Omega} K(t,s)F[s,x(s)]ds + f(t), \tag{8}$$

в котором

$\mathbf{K(t,s)}$ – неотрицательная и непрерывная на множестве $\Omega\times\Omega$ функция;

$\mathbf{F(s,u)}$ – неотрицательная положительная при $u > 0$ и непрерывная на множестве $\Omega\times[0;+\infty]$ функция, причем $F'_u(s,u)\to 0$ при $u > 0$ и $s\in\Omega$, являющаяся вогнутой функцией, т.е.

$$F[s,\lambda u] \geq \lambda F[s,u]$$

для $\lambda\in[0,1]$ и

$$F[s,u_2]-F[s,u_1] \leq F'_u(s,u_1)(u_2-u_1)$$

для всех $s\in\Omega$, $u_1,u_2 \geq 0$;

$\mathbf{f(t)}$ – заданная непрерывная неотрицательная функция;

$\mathbf{x(t)}$ – неизвестная функция аргумента $t\in\Omega$.

Для уравнения (8) известна [2] теорема существования и единственности непрерывного неотрицательного решения $x(t)$ при любых непрерывных функциях $f(t)$, $f(t)\geq 0$. При этом, если в (8) заменить свободный член $f(t)$ на функцию $f_1(t)$:

$$f_1(t)\geq f(t), \quad f_1(t)\neq f(t) \quad t\in\Omega,$$

то решение $x_1(t)$ нового уравнения будет связано с решением $x(t)$ уравнения (8) неравенством

$$x_1(t) \ge x(t) \quad (t \in \Omega).$$

Более того, в случае непрерывного неразложимого ядра $\mathbf{K(t,\ s)}$ будет иметь место строгое неравенство

$$x_1(t) > x(t), \quad (t \in \Omega). \tag{9}$$

Это следует из того, что функция $[x_1(t) - x(t)]$ является решением линейного интегрального уравнения

$$y(t) = \int_\Omega K(t,s)F'_u[s, x(s)]y(s)ds + [f_1(t) - f(t)]$$

с неотрицательным и неразложимым ядром $K(t,s)\ F'_u\ [s, x(s)]$.

Неразложимость этого ядра следует из неразложимости ядра $\mathbf{K(t,s)}$ и положительности функции $F'_u\ [s, x(s)]$.

Пусть:

$$\omega_0 = \{t : t \in \Omega; f_1(t) > f(t)\};$$

$$\omega_1 = \left\{ t : \frac{x_1(t) - x(t)}{x(t)} = \max_{s \in \Omega} \frac{x_1(s) - x(s)}{x(s)} \right\}.$$

Справедлива следующая теорема, являющаяся аналогом принципа Хикса, ранее установленного для линейных систем алгебраических уравнений и для линейных интегральных уравнений.

Теорема 2. Пересечение множеств ω_0 и ω непусто, т.е. максимум относительного приращения решения уравнения (8) при переходе от свободного члена $\mathbf{f(t)}$ к свободному члену $\mathbf{f_1(t)}$ достигается по крайней мере в одной из точек множества ω_0.

Доказательство: Так как

$$\frac{x_1(t) - x(t)}{x(t)} = \frac{x_1(t)}{x(t)} - 1,$$

то точки максимума относительного приращения решения совпадает с точками максимума функции

$$\mu(t) = \frac{x_1(t)}{x(t)}$$

или с точками минимума функции

$$\lambda(t) = \mu^{-1}(t).$$

Учитывая (9), можно утверждать, что $0 < \lambda(t) < 1$. Для доказательства теоремы предположим противное: пусть

$$\omega_0 \cap \omega_1 = \varnothing. \tag{10}$$

Тогда для всех $t \in \omega_1$ и тем самым $t \,\overline{\in}\, \omega_0$ имеем, учитывая вогнутость функции $\mathbf{F(s,u)}$ по $\mathbf{u}$ и равенство

$$\lambda(s)\mu(t)=1,(t,s\in\omega_1)$$

следующее:

$$x_1(t)=\mu(t)x(t)=\mu(t)\int_{\Omega}K(t,s)F[s,x(s)x_1(s)]ds+\mu(t)f(t)\geq$$

$$\geq\mu(t)\int_{\Omega}\lambda(s)K(t,s)F[s,x_1(s)]ds+\mu(t)f(t)=$$

$$=[\int_{\omega_1}+\int_{\Omega/\omega_1}]\mu(t)\lambda(s)K(t,s)F[s,x_1(s)]ds+\mu(t)f(t)=$$

$$=\int_{\omega_1}K(t,s)F\big[s,x_1(s)]ds+\int_{\Omega/\omega_1}]\mu(t)\lambda(s)K(t,s)F[s,x_1(s)]ds+\mu(t)f(t).$$

С другой стороны, для всех $t\in\Omega$ и, в частности, $t\in\omega_1$:

$$x_1(t)=[\int_{\omega_1}+\int_{\Omega/\omega_1}]K(t,s)F[s,x_1(s)]ds+f_1(t).$$

Из двух последних соотношений, принимая во внимание, что согласно (10) $f_1(t)=f(t)$, для $t\in\omega_1$ получим

$$\int_{\Omega/\omega_1}K(t,s)[1-\mu(t)\lambda(s)]F[s,x_1(s)]ds\geq[\mu(t)-1\}f(t)\geq 0.$$

С другой стороны, учитывая, что для $t\in\omega_1$ и $s\in[\Omega/\omega_1]$

$$\lambda(s)\mu(t)>1$$

заключаем, что подынтегральная функция в левой части этого неравенства неположительная и, следовательно, неположительная сама левая часть. Таким образом, приходим к выводу о том, что

$$\int_{\Omega/\omega_1}K(t,s)[1-\mu(t)\lambda(s)]F[s,x_1(s)]ds\equiv 0.$$

В силу сказанного это возможно лишь в том случае, если

$$K(t,s)\equiv 0,\quad (t\in\omega_1, s\in[\Omega/\omega_1]),$$

а это означает разложимость ядра **K(t,s)** и противоречит условию теоремы. Следовательно, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулынина Е.В. Принцип Хикса и его развитие на интегральных уравнениях. // Сб. докл. НПК «Современные проблемы технического, естественнонаучного и гуманитарного знания». – Губкин. – 2001.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.

Поступила в редколлегию 15.10.2001