

**ПРИНЦИП ХИКСА МАКСИМУМА ОТНОСИТЕЛЬНОГО
ПРИРАЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОГНУТОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ
И НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ГАММЕРШТЕЙНА**

Е.В. Гулынина
(представил д.т.н., проф. Н.И. Корсунов)

В работе получен полный аналог принципа Хикса для более широкого класса задач, а именно, для нелинейных алгебраических уравнений с вогнутой нелинейностью и нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна, что играет важную роль в математической экономике.

В [1] рассмотрено развитие известного принципа Хикса на случай систем линейных алгебраических уравнений и линейных интегральных уравнений.

В этой статье приведено развитие принципа Хикса для системы нелинейных алгебраических уравнений и для нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна с вогнутой нелинейностью.

1. Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений вида

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j(x_1, \dots, x_n) + f_i, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

в которой a_{ij} - заданные неотрицательные коэффициенты; f_i - заданные неотрицательные свободные члены; x_i ($i = \overline{1, n}$) - неизвестные; $F_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - непрерывно дифференцируемые по x_i ($i = \overline{1, n}$) функции, монотонно возрастающие по каждой из переменных x_1, x_2, \dots, x_n и вогнутые по этим переменным, т.е.

$$F_j(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \geq \lambda F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

для всех $\lambda \in [0, 1]$ и

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) - F_j(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial x_i} \cdot (x_i - y_i) \quad (3)$$

для всех $j = \overline{1, n}$ и $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R_t^n$.

Для таких систем в [2] доказана теорема существования единственного неотрицательного решения для любого набора неотрицательных свободных членов (f_1, f_2, \dots, f_n) . При этом, если в (1) свободные члены (f_1, f_2, \dots, f_n) заменить на $(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_n^{(1)})$, $f_i^{(1)} \geq f_i \quad (i = \overline{1, n})$, где $f_i^{(1)} \neq f_i$ хотя бы для одного $i = \overline{1, n}$, то решение $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ новой системы уравнений будет связано с решением (x_1, x_2, \dots, x_n) системы (1) неравенствами

$$x_i^{(1)} \geq x_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Более того, в случае неразложимой матрицы

$$A = (a_{ij}) \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (4)$$

будут иметь место строгие неравенства

$$x_i^{(1)} > x_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Это следует из того, что вектор $y = (x^{(1)} - x)$ будет являться решением следующей линейной системы алгебраических уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) y_j + (f_i^{(1)} - f_i) \quad (i = \overline{1, n})$$

с неотрицательной и неразложимой матрицей

$$\left(a_{ij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

Неразложимость этой матрицы следует из неразложимости матрицы (4) и положительности элементов матрицы

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) (i, j = \overline{1, n}).$$

Введем в рассмотрение множества

$$\omega_0 = \left\{ i : f_i^{(1)} > f_i \right\}; \quad (6)$$

$$\omega_1 = \left\{ i : \frac{x_i^{(1)} - x_i}{x_i} = \max_{j=1, n} \frac{x_j^{(1)} - x_j}{x_j} \right\}, \quad (7)$$

т.е. ω_0 - это носитель вектора $(f^{(1)} - f)$, а ω_1 - множество тех индексов i ($i = \overline{1, n}$), на которых достигается максимум относительного приращения решения нелинейной системы (1) при переходе от свободных членов (f_1, f_2, \dots, f_n) к свободным членам $(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots, f_n^{(1)})$.

Следующая теорема является полным аналогом доказанного для случая линейной системы алгебраических уравнений принципа Хикса максимума относительного приращения решения системы в случае нелинейной системы алгебраических уравнений с вогнутой нелинейностью.

Теорема 1. При переходе от системы уравнений (1) со свободными членами $\{f_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) к системе со свободными членами $\{f_i^{(1)}\}$ ($i = \overline{1, n}$), где

$$f_i^{(1)} \geq f_i \quad (i = \overline{1, n})$$

максимум относительного приращения решения достигается, по крайней мере, на одном из индексов системы индексов, т.е.

$$\omega_1 \cap \omega_0 \neq \emptyset.$$

При этом доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 2 дальнейшего изложения.

2. Рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна

$$x(t) = \int_{\Omega} K(t, s) F[s, x(s)] ds + f(t), \quad (8)$$

в котором

$K(t, s)$ – неотрицательная и непрерывная на множестве $\Omega \times \Omega$ функция;

$F(s, u)$ – неотрицательная положительная при $u > 0$ и непрерывная на множестве $\Omega \times [0; +\infty)$ функция, причем $F'_u(s, u) \rightarrow 0$ при $u > 0$ и $s \in \Omega$, являющаяся вогнутой функцией, т.е.

$$F[s, \lambda u] \geq \lambda F[s, u]$$

для $\lambda \in [0, 1]$ и

$$F[s, u_2] - F[s, u_1] \leq F'_u(s, u_1)(u_2 - u_1)$$

для всех $s \in \Omega$, $u_1, u_2 \geq 0$;

$f(t)$ – заданная непрерывная неотрицательная функция;

$x(t)$ – неизвестная функция аргумента $t \in \Omega$.

Для уравнения (8) известна [2] теорема существования и единственности непрерывного неотрицательного решения $x(t)$ при любых непрерывных функциях $f(t)$, $f(t) \geq 0$. При этом, если в (8) заменить свободный член $f(t)$ на функцию $f_1(t)$:

$$f_1(t) \geq f(t), \quad f_1(t) \neq f(t) \quad t \in \Omega,$$

то решение $x_1(t)$ нового уравнения будет связано с решением $x(t)$ уравнения (8) неравенством

$$x_1(t) \geq x(t) \quad (t \in \Omega).$$

Более того, в случае непрерывного неразложимого ядра $K(t, s)$ будет иметь место строгое неравенство

$$x_1(t) > x(t), \quad (t \in \Omega). \quad (9)$$

Это следует из того, что функция $[x_1(t) - x(t)]$ является решением линейного интегрального уравнения

$$y(t) = \int_{\Omega} K(t, s) F'_u[s, x(s)] y(s) ds + [f_1(t) - f(t)]$$

с неотрицательным и неразложимым ядром $K(t, s) F'_u[s, x(s)]$.

Неразложимость этого ядра следует из неразложимости ядра $K(t, s)$ и положительности функции $F'_u[s, x(s)]$.

Пусть:

$$\omega_0 = \{t : t \in \Omega; f_1(t) > f(t)\};$$

$$\omega_1 = \left\{ t : \frac{x_1(t) - x(t)}{x(t)} = \max_{s \in \Omega} \frac{x_1(s) - x(s)}{x(s)} \right\}.$$

Справедлива следующая теорема, являющаяся аналогом принципа Хикса, ранее установленного для линейных систем алгебраических уравнений и для линейных интегральных уравнений.

Теорема 2. Пересечение множеств ω_0 и ω непусто, т.е. максимум относительного приращения решения уравнения (8) при переходе от свободного члена $f(t)$ к свободному члену $f_1(t)$ достигается по крайней мере в одной из точек множества ω_0 .

Доказательство. Так как

$$\frac{x_1(t) - x(t)}{x(t)} = \frac{x_1(t)}{x(t)} - 1,$$

то точки максимума относительного приращения решения совпадают с точками максимума функции

$$\mu(t) = \frac{x_1(t)}{x(t)}$$

или с точками минимума функции

$$\lambda(t) = \mu^{-1}(t).$$

Учитывая (9), можно утверждать, что $0 < \lambda(t) < 1$. Для доказательства теоремы предположим противное: пусть

$$\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset. \quad (10)$$

Тогда для всех $t \in \omega_1$ и тем самым $t \notin \omega_0$ имеем, учитывая вогнутость функции $F(s, u)$ по u и равенство

$$\lambda(s)\mu(t) = 1, (t, s \in \omega_1)$$

следующее:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu(t)x(t) = \mu(t) \int_{\Omega} K(t,s)F[s, x(s)x_1(s)]ds + \mu(t)f(t) \geq \\ &\geq \mu(t) \int_{\Omega} \lambda(s)K(t,s)F[s, x_1(s)]ds + \mu(t)f(t) = \\ &= \left[\int_{\omega_1} + \int_{\Omega/\omega_1} \right] \mu(t)\lambda(s)K(t,s)F[s, x_1(s)]ds + \mu(t)f(t) = \\ &= \int_{\omega_1} K(t,s)F[s, x_1(s)]ds + \int_{\Omega/\omega_1} \mu(t)\lambda(s)K(t,s)F[s, x_1(s)]ds + \mu(t)f(t). \end{aligned}$$

С другой стороны, для всех $t \in \Omega$ и, в частности, $t \in \omega_1$:

$$x_1(t) = \left[\int_{\omega_1} + \int_{\Omega/\omega_1} \right] K(t,s)F[s, x_1(s)]ds + f_1(t).$$

Из двух последних соотношений, принимая во внимание, что согласно (10) $f_1(t) = f(t)$, для $t \in \omega_1$ получим

$$\int_{\Omega/\omega_1} K(t,s)[1 - \mu(t)\lambda(s)]F[s, x_1(s)]ds \geq [\mu(t) - 1]f(t) \geq 0.$$

С другой стороны, учитывая, что для $t \in \omega_1$ и $s \in [\Omega/\omega_1]$

$$\lambda(s)\mu(t) > 1$$

закключаем, что подынтегральная функция в левой части этого неравенства неположительная и, следовательно, неположительная сама левая часть. Таким образом, приходим к выводу о том, что

$$\int_{\Omega/\omega_1} K(t,s)[1 - \mu(t)\lambda(s)]F[s, x_1(s)]ds \equiv 0.$$

В силу сказанного это возможно лишь в том случае, если

$$K(t,s) \equiv 0, \quad (t \in \omega_1, s \in [\Omega/\omega_1]),$$

а это означает разложимость ядра $K(t,s)$ и противоречит условию теоремы. Следовательно, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулынина Е.В. Принцип Хикса и его развитие на интегральных уравнениях. // Сб. докл. НПК «Современные проблемы технического, естественнонаучного и гуманитарного знания». – Губкин. – 2001.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.

Поступила в редколлегию 15.10.2001
