УДК 681.5.015

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРУП ПІДСТАНОВОК ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ХАОТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

к.т.н. А.Л. Єрохін, В.М. Бурцев
(подав д.т.н., проф. М.М. Зацеркляний)

В статті обґрунтовано застосування теорії груп для моделювання процесів управління складними об’єктами енергетики. Розглянуто питання застосування апарату теорії груп підстановок для моделювання детермінованих хаотичних процесів.

Для функціонування системи управління складними об'єктами енергетики необхідна наявність інформаційного середовища - системної сукупності засобів передачі даних, інформаційних ресурсів, протоколів взаємодії, апаратно - програмного забезпечення. Актуальними є питання істиності і правильності передачі параметрів режимів електричних мереж. Розглянемо питання застосування апарату теорії груп підстановок для моделювання детермінованих хаотичних процесів (ДХП).

Відомі методи генерації ДХП і електронні пристрої їх реалізації [1,2]. В основному зазначені методи ґрунтуються на електронних схемах нелінійного генератора хаотичних коливань.

Викликають інтерес моделі генерації ДХП, засновані на комбінаторно-топологічному перетворенні [3] двовимірної інформації, що являє собою перетворення підстановок, що утворюють симетричну групу ступеня $\mathbf{n}$.

Практично результати досліджень цього класу ДХП можуть забезпечити розробку методів і алгоритмів рішення ряду задач, зв'язаних, по-перше, з відновленням перекрученого "образу" первинної інформації, по-друге, з корекцією фазових перекручувань каналів передачі інформації складно-організованих систем.

Фізична модель кодування інформації дала можливість досліджувати деякі ергодичні процеси, які відображаються на фазових площинах і детермінуються стійкими просторово-динамічними структурами атракторів. Вивчення фізичних моделей дозволяє розробити математичну модель генерації ДХП, що базується на теоретико-множинних і топологічних властивостях підмножин елементів входу $(\mathbf{a_i})$ і виходу $(\mathbf{b_j})$ підмножини $(\mathbf{w_i})$ елементарних каналів передачі інформації, що утворюють системний канал $(\mathbf{W})$ інформації, до якого вносяться фазові перекручування.

Зазначені властивості визначаються тим, що:

a) елементи $(\mathbf{a_i})$ і $(\mathbf{b_j})$ підмножин входу $[\mathbf{A}]$ і виходу $[\mathbf{B}]$ в каналі $(\mathbf{W})$ є дискретними й обмеженими;

b) елементи $(\mathbf{a_i})$ й $(\mathbf{b_j})$ ізоморфні один до одного, тому що мають властивість сполучення

$$(\mathbf{a_i}) \leftrightarrow (\mathbf{b_j}); \tag{1}$$

c) відображення елементів підмножин є тотожними $(\mathbf{a_i}) \equiv (\mathbf{b_j})$;

d) елементарні канали $(\mathbf{w_i}) \in (\mathbf{W})$ системного каналу є "слабко-структурованими".

Легко переконатися в тому, що підмножини $(\mathbf{a_i}) \in [\mathbf{A}]$ і $(\mathbf{b_j}) \in [\mathbf{B}]$ задовольняють аксіомам загальної топології й аксіомам операцій замикання [4, 5], мають властивості замкнутості, віддільності і рахункову базу. Зазначені підмножини утворюють топологічний простір $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega})$ з дискретним носієм $\boldsymbol{\omega}$ топології і будь-які два елементи $[\mathbf{A}]$ і $(\mathbf{b_k}), (\mathbf{b_{\mathit{l}}}) \in [\mathbf{B}]$ множини $\boldsymbol{\Omega}$ мають непересічні околиці. Тому $[\mathbf{A}] \subset (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega})$, $[\mathbf{B}] \subset (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega})$ відносяться до "хаусдорфових [3] топологічних просторів".

Запишемо підмножину $(\mathbf{a_{ij}}) \subset [\mathbf{A}]$ у матричній формі, увівши тим самим локальну систему координат, щодо якої проводяться перетворення підстановок, як порушення упорядкованості "прообразу", відображуваного в "образ" $(\mathbf{b_{k\mathit{l}}}) \subset [\mathbf{B}]$.

Так для $(\mathbf{a_{ij}}) \subset [\mathbf{A}]$ упорядкованість елементів $(\mathbf{a_{ij}})$ визначається матрицею

$$[\mathbf{A}] = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ij}} \quad . \tag{2}$$

Аналогічно для $(\mathbf{b_{k\mathit{l}}}) \subset [\mathbf{B}]$ – матрицею

$$[\mathbf{B}] = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{\mathit{l}=1}}^{\mathbf{s}} \mathbf{b_{k\mathit{l}}} \ . \tag{3}$$

Введемо в (1, 2, 3) оператор $\mathbf{K}$ перетворень підстановок, які відображають довільним образом $(\mathbf{a_{ij}}) \to (\mathbf{b_{k\mathit{l}}})$. Розглянемо матричний оператор $[\mathbf{K}]$ як матрицю ізоморфних відображень

$$[\mathbf{K}]:\ [\mathbf{A}]\rightarrow[\mathbf{B}]\equiv\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{a}_{ij})\rightarrow\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{s}(\mathbf{b}_{kl})\ . \tag{4}$$

Відобразимо на $[\mathbf{A}]$ деяку регулярну двовимірну функцію $[\mathbf{F}]$, елементи $(\mathbf{a}_{ij})$ якої перетворюють $[\mathbf{F}]$ у підмножину упорядкованих растрових елементів

$$[\mathbf{F}^*]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{a}_{ij}\otimes\mathbf{f}_{ij})\subset[\mathbf{A}]\ , \tag{5}$$

де $[\mathbf{F}^*]\subseteq[\mathbf{F}]$ - матриця $[\mathbf{F}]$ в растровій формі представлення;

$(\mathbf{a}_{ij}\otimes\mathbf{f}_{ij})$- дискретні фрагменти функції, які відображені на $(\mathbf{a}_{ij})$.

Після $[\mathbf{K}]$ перетворення підстановок (4) функція $[\mathbf{F}]$на $[\mathbf{B}]$ може бути представлена у вигляді

$$[\mathbf{F}^{**}]=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{s}(\mathbf{b}_{kl}\otimes\mathbf{f}_{kl})\subset[\mathbf{B}]\ , \tag{6}$$

де $[\mathbf{F}^{**}]\subset[\mathbf{F}]$ - матриця хаотично перетвореної функції $[\mathbf{F}^*]$ в растровій формі представлення;

$(\mathbf{b}_{kl}\otimes\mathbf{f}_{kl})$- дискретні фрагменти функції, які відображені на $(\mathbf{b}_j)$.

Оператору $[\mathbf{K}]$ може бути надане чисельне значення коефіцієнта $\mathbf{R}$, що визначає ступінь комбінаторних підстановок (хаотичності) $(\mathbf{b}_{kl})$ на підмножині $[\mathbf{B}]$:

$$\mathbf{R}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{s}\mathbf{b}_{kl}\Big/(\mathbf{p}\times\mathbf{s})\ , \tag{7}$$

де $(\mathbf{b}_{kl})$- число елементів підстановок у $[\mathbf{B}]$;

$(\mathbf{p}\times\mathbf{s})$ - загальне число елементів $(\mathbf{b}_{kl})$ у $[\mathbf{B}]$.

Коефіцієнт $\mathbf{R}$ набуває значення в інтервалі $\mathbf{0}\le\mathbf{R}\le\mathbf{1}$ і, якщо $\mathbf{R}=\mathbf{0}$, то елементи $(\mathbf{b}_{kl})$ і $(\mathbf{a}_{ij})$ множин $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{A}]$ і самі множини ізоморфні, при цьому $[\mathbf{F}^*]\equiv[\mathbf{F}^{**}]$. При $\mathbf{R}=\mathbf{1}$ перетворення (4 - 6) визначає на $[\mathbf{B}]$ хаос і $[\mathbf{F}^*]\neq[\mathbf{F}^{**}]$.

Задаючи значення коефіцієнта $\mathbf{R}$ (7) у межах $\mathbf{0}\le\mathbf{R}\le\mathbf{1}$, одержуємо можливість генерувати ДХП. Після $[\mathbf{K}]$ перетворення (6) підмножина $(\mathbf{b}_{kl})\subset[\mathbf{B}]$ розпадається на дві підмножини. Перша з них

$$[\Phi]=\bigcup(\mathbf{b}_{kl}) \tag{8}$$

складена з усіх підстановок елементів $(\mathbf{b}_{\mathbf{k}l})$.

Друга підмножина

$$[\Lambda]=\bigcup(\mathbf{b}_{\mathbf{ty}}) \leftrightarrow \bigcup(\mathbf{a}_{\mathbf{ty}}) \tag{9}$$

складається з всіх елементів $(\mathbf{b}_{\mathbf{ty}})$ ізоморфних $(\mathbf{a}_{\mathbf{ty}})$.

Множини $[\mathbf{A}]$ і $[\mathbf{B}]$ з врахуванням (5, 8, 9) представимо у вигляді:

$$[\mathbf{A}]\cong[\Lambda]\subset(\Omega,\omega); \tag{10}$$

$$(\Omega,\omega)\supset[\mathbf{B}]=\bigcup\{[\Lambda]\vee[\Phi]\} . \tag{11}$$

Топологія простору (Ω,ω) визначає об'єднання (11) як топологічне подібне до множини $[\mathbf{A}]$, а множини $[\Lambda]$ і $[\Phi]$ - гомеоморфні колу. Дискретні фрагменти $(\mathbf{f}_{\mathbf{k}l})\subset[\mathbf{F}^{**}]\leftrightarrow[\mathbf{F}^{*}]$, відображені множиною $[\Lambda]$ на $[\mathbf{B}]$, мають розподіл, еквівалентний на $[\mathbf{A}]$. Для усіх же фрагментів $(\mathbf{f}_{\mathbf{ty}})\subset[\mathbf{F}^{**}]\subset[\Phi]$ - розподіл на $[\mathbf{B}]$ випадковий.

Одним з фундаментальних властивостей ДХП є властивість структурної стійкості атрактора динамічної системи [6]. Модель процесу підстановок можна розглядати як динамічну зі слабкою чи сильною ергодичністю. Для реалізації ДХП у динаміці досить надати функції $[\mathbf{F}]$ будь-яке афінне перетворення на $[\mathbf{A}]$. На основі виразів (4 - 6, 8 - 11) бачимо, що найменша зміна $[\mathbf{F}]$, відображувана на $(\mathbf{a}_{\mathbf{ij}})$, приводить до нового, випадкового положення фрагментів $(\mathbf{f}_{\mathbf{k}l})$ на $[\mathbf{B}]$.

Оскільки елементи підмножини $[\Phi]$ в структурі $[\mathbf{B}]$ можуть утворювати деякі топологічно подібні фігури, то логічно припустити, що атрактором ДХП буде підмножина $\cup[\Psi]\subseteq[\Phi]$. Як приклад розглянемо модель з коефіцієнтом $\mathbf{R} = \mathbf{1}$, коли уся фазова поверхня й атрактор системи збігаються. При всіх значеннях $\mathbf{0} \le \mathbf{R} \le \mathbf{1}$ вираз (11) можна перетворити до виду

$$[\mathbf{B}]=\bigcup\{[\Lambda]\vee[\Phi]\}=\bigcup\{[\Lambda]\vee[\bigcup[\Psi]]\}, \tag{12}$$

де $[\bigcup[\Psi]]\cong[\Phi]$ - об'єднання областей атракторів на фазовій площині.

Розвиток ДХП на фазовій площині $[\mathbf{B}]\equiv[\Phi]\vee[\Lambda]$ для групи підстановок з коефіцієнтами $\mathbf{0.3} \le \mathbf{R} \le \mathbf{0.7}$ детермінується тільки її топологією.

Таким чином, за допомогою фізичних і математичних моделей можлива генерація детермінованих хаотичних процесів на двовимірних фазових поверхнях з дискретною топологією.

Хаотичні процеси розглянутих моделей детерміновані природними атракторами, які утворені в процесі безупинних топологічно подібних перетворень підмножин (a_i) в (b_j).

Представлені математичні моделі можуть використовуватися для управління інженерними мережами з різною природою цільового продукту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Колпакова Л.В. Методика диагностирования параметров генератора в методе измерений на базе хаотического генератора // 3-я Международная конференция "Цифровая обработка сигналов и ее применение". – М. – 2000. – С. 90.
2. Воронов С.С., Колпакова Л.В., Кузнецов В.А. Метод измерения с использованием нелинейных динамических систем // Измерительная техника. – 1996. – № 12 .– С. 16.
3. Бурцев Вал.Н., Бурцев Вл.Н., Ерохин А.Л. Способ моделирования стохастических процессов с помощью топологических преобразований // Пробл. бионики. – 2000. – Вып. 51. – С. 150.
4. Лямец В.И., Тевяшев А.Д. Системный анализ. Вводный курс. – Харьков: ХТУРЭ, 1998. – 126 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
6. Вороной М.Ф. Задание топологии на многоаспектных классификационных структурах при моделировании концептуальных знаний // Проблемы. бионики. – Вып. 49. – С. 99 - 102.
7. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988. – *eal@adm.univd.kharkov.ua*.

Надійшла до редколегії 15.10.2001