

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНОВАТОСТИ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

Г.М. Редькин

(представил д.т.н., проф. Н.И. Корсунов)

Систему трещин в пространстве недр отождествили со случайным вектором частоты трещин, модуль значений которого равен частоте трещин, и направление перпендикулярно плоскости системы трещин. Это позволило получить в аналитическом виде оценку интенсивности трещиноватости массива горных пород и погрешность этой оценки в классе нестационарных анизотропных моделей.

Массивы горных пород характеризуются неоднородностями различных порядков: от микроскопических дефектов минералов до горных структур, охватывающих целые геологические формации. Однако, при решении геомеханических и технологических задач на горных и строительных предприятиях существенное влияние оказывает неоднородность, обусловленная трещиноватостью пород [1, 2]. Трещины, имеющие одинаковую (параллельную) ориентировку, объединяют в системы трещин [1].

В горных породах обычно развиваются несколько систем трещин, которые пересекаясь, разделяют массив на блоки.

Приведем определения, которые будут использованы при математическом моделировании трещиноватости массива горных пород.

Частотой трещин [1] называют среднее количество трещин на погонный метр (либо на единицу длины) разреза в направлении перпендикулярном данной системе.

Интенсивностью трещиноватости [1] называют количество трещин на погонный метр (либо на единицу длины) разреза в любом направлении.

Плоскостью системы трещин назовём плоскость, проходящую через начало координат параллельно трещинам системы.

В основе изучения трещиноватости лежат замеры трещиноватости в точках пространства недр. Применительно к нашей задаче под точкой замера будем понимать некоторый объём в массиве горных пород достаточно большой для возможности определения угла падения, азимута простираения плоскости системы трещин, а также частоты системы трещин и достаточно малый по сравнению с оцениваемым массивом горных пород. В [1] приведена детерминированная модель трещиноватости массива горных пород, которая

абсолютно точно описывает интенсивности трещиноватости идеальных систем трещин со строго параллельными плоскостями и равными расстояниями между ними, что в реальных условиях невыполнимо.

Разработанная ниже стохастическая модель, позволяет описывать реальную трещиноватость массива горных пород с учётом погрешности детерминированного моделирования. Систему трещин в пространстве отождествим со случайным вектором частоты трещин, характеристики которого (математическое ожидание и дисперсию) будем определять по замерам трещиноватости в точках недр. Каждому замеру поставим в соответствие значение случайного вектора, длина которого равна частоте трещин в точке замера, а направление совпадает с направлением нормали плоскости системы трещин в точке замера.

Пусть в исследуемой области пространства недр, характеризующееся n системами трещин ($i = 1, 2, \dots, n$), сделано по n_j ($j = 1, 2, \dots, n_i$) замеров в каждой i -й системе трещин: ω_{ij} – частота трещин; A_{ij} , δ_{ij} – соответственно азимут простирания и угол падения плоскости трещин в точке замера.

По определению плоскости системы трещин получим её нормальное уравнение в точке замера

$$-x \sin A_{ij} \sin \delta_{ij} + y \cos A_{ij} \sin \delta_{ij} + z \cos \delta_{ij} = 0, \quad (1)$$

из которого и определения случайного вектора частоты трещин следует его значение в точке замера

$$\bar{\omega} = (x_{ij}; y_{ij}; z_{ij}), \quad (2)$$

где декартовы координаты определяются равенствами

$$\begin{cases} x_{ij} = -\omega_{ij} \sin A_{ij} \sin \delta_{ij}; \\ y_{ij} = \omega_{ij} \cos A_{ij} \sin \delta_{ij}; \\ z_{ij} = \omega_{ij} \cos \delta_{ij}. \end{cases} \quad (3)$$

Оценкой i -й системы трещин и её математического эквивалента случайного вектора трещин будут средние значения замеров в n_i точках, которые обозначим через

$$M\bar{\omega} = (Mx_i; My_i; Mz_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$Mx_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}; \quad My_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}; \quad Mz_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}. \quad (5)$$

На основе оценки (4) интенсивность трещиноватости, порожденную i -й системой трещин, определим равенством [4]:

$$I_i(\bar{n}) = |\mathbf{n} \mathbf{p}_{\bar{n}} \mathbf{M} \bar{\omega}_i| = |\mathbf{M} \bar{\omega}_i \bullet \bar{n}| = |\mathbf{M} x_i \cos \alpha + \mathbf{M} y_i \cos \beta + \mathbf{M} z_i \cos \gamma|, \quad (6)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – задающий направление в пространстве единичный вектор направляющих косинусов.

Тогда на основе формулы (6) интенсивность трещиноватости, индуцированная совокупностью n систем трещин, в направлении \mathbf{n} равна

$$I(\bar{n}) = \sum_{i=1}^n I_i(\bar{n}) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{M} x_i \cos \alpha + \mathbf{M} y_i \cos \beta + \mathbf{M} z_i \cos \gamma|, \quad (7)$$

Выражение (7) может быть положено в основу решения большого количества практических задач, в том числе для определения экстремальных значений интенсивностей трещиноватости и направлений, по которым эти значения достигаются, определения средних размеров блока, его формы и ориентировки в пространстве.

Так как природные системы трещин не идеальны и для их определения использован выборочный метод статистики, то равенство (7) описывает интенсивность трещиноватости с погрешностью. Определим эту погрешность в классе нестационарных анизотропных моделей.

Обозначим через $\Delta \omega_{ij} = (\Delta x_{ij}; \Delta y_{ij}; \Delta z_{ij})$ вектор отклонения между вектором частоты трещин в j -й точке i -й системы трещин и математическим ожиданием i -й системы. Он равен

$$\Delta \bar{\omega}_{ij} = \bar{\omega}_{ij} - \mathbf{M} \bar{\omega}_i = \left(x_{ij} - \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}; \quad y_{ij} - \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}; \quad z_{ij} - \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij} \right). \quad (8)$$

При этом $\Delta x_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}; \quad \Delta y_{ij} = y_{ij} - \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}; \quad \Delta z_{ij} = z_{ij} - \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}.$

Найдём проекцию вектор - отклонения на направление $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$:

$$\mathbf{n} \mathbf{p}_{\bar{n}} \Delta \bar{\omega}_{ij} = \Delta \bar{\omega}_{ij} \bullet \bar{n} = \Delta x_{ij} \cos \alpha + \Delta y_{ij} \cos \beta + \Delta z_{ij} \cos \gamma. \quad (9)$$

Возведём обе части равенства (9) в квадрат, просуммируем средние квадраты по всем точкам замеров i -й системы трещин и получим дисперсию интенсивности трещиноватости i -й системы в направлении \mathbf{n} :

$$D_i(\bar{n}) = \bar{n} \bullet D_i \bullet \bar{n}^T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где $\bar{n}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$ – транспонированный вектор направляющих косинусов \mathbf{n} .

Назовём \mathbf{D}_i тензором погрешности интенсивности трещиноватости i -й системы трещин, который при фиксированных осях координат представляется квадратной симметричной неособенной матрицей

$$\mathbf{D}_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\Delta x_{ij})^2 & \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} & \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij} \Delta z_{ij} \\ \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta y_{ij} \Delta x_{ij} & \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\Delta y_{ij})^2 & \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta y_{ij} \Delta z_{ij} \\ \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta y_{ij} \Delta z_{ij} & \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta z_{ij} \Delta y_{ij} & \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\Delta z_{ij})^2 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Суммируя обе части равенства (10) по всем системам трещин, получим дисперсию $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{n}}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i(\bar{\mathbf{n}})$ интенсивности трещиноватости \mathbf{n} систем трещин в направлении \mathbf{n} :

$$\mathbf{D}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{D} \bullet \bar{\mathbf{n}}^T. \quad (12)$$

Назовём \mathbf{D} тензором погрешности интенсивности трещиноватости, который также является квадратной симметричной неособенной матрицей

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\Delta x_{ij})^2 & \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij} \Delta z_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta y_{ij} \Delta x_{ij} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\Delta y_{ij})^2 & \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta y_{ij} \Delta z_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta y_{ij} \Delta z_{ij} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta z_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\Delta z_{ij})^2 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Приведение матриц \mathbf{D}_i ($i=1, 2, \dots, n$) и \mathbf{D} к диагональному виду позволяет определить их собственные значения λ_k^i и λ_k ($k=1, 2, 3$), которые являются экстремальными значениями дисперсий, и соответствующие им собственные векторы \mathbf{W}_k^i и \mathbf{W}_k , ($k=1, 2, 3$), представляющие направления экстремальных дисперсий.

Координаты собственных векторов являются решениями систем линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathbf{D}_i - \lambda_k^{(i)} \mathbf{E} \right) \mathbf{W}_k^{(i)} \right\| &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \left\| \left(\mathbf{D} - \lambda_k \mathbf{E} \right) \mathbf{W}_k \right\| &= 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{14}$$

где λ_k^i – корни характеристических уравнений $|\mathbf{D}_i - \lambda_k \mathbf{E}| = 0$; λ_k – корни характеристического уравнения $|\mathbf{D} - \lambda_k \mathbf{E}| = 0$; \mathbf{E} – единичная матрица.

Геометрическим аналогом тензоров (11) и (13) являются эллипсоиды в исследуемом пространстве, длины полуосей которых равны собственным числам и совпадают с направлениями собственных векторов. А дисперсии интенсивностей трещиноватости (10), (12) представляют в пространстве геометрические места проекций этих эллипсоидов на направления \mathbf{n} .

Приведённая стохастическая модель может быть использована для дальнейшего изучения трещиноватости массива горных пород, а также положена в основу решений геомеханических, технологических и оптимизационных задач горнодобывающих и строительных предприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейштадт Л.И., Пирогов И.А. Методы инженерно - геологического изучения трещиноватости горных пород. – М.: Энергия, 1969. – 248 с.
2. Редькин Г.М. Аналитическое выражение интенсивности трещиноватости горных пород // Математическое моделирование технологических процессов в производстве строительных материалов и конструкций. – Белгород. – 1998. – С. 131 - 141.

Поступила в редколлегию 29.10.2001