УДК 621.32

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНОВАТОСТИ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

Г.М. Редькин
(представил д.т.н., проф. Н.И. Корсунов)

Систему трещин в пространстве недр отождествили со случайным вектором частоты трещин, модуль значений которого равен частоте трещин, и направление перпендикулярно плоскости системы трещин. Это позволило получить в аналитическом виде оценку интенсивности трещиноватости массива горных пород и погрешность этой оценки в классе нестационарных анизотропных моделей.

Массивы горных пород характеризуются неоднородностями различных порядков: от микроскопических дефектов минералов до горных структур, охватывающих целые геологические формации. Однако, при решении геомеханических и технологических задач на горных и строительных предприятиях существенное влияние оказывает неоднородность, обусловленная трещиноватостью пород [1, 2]. Трещины, имеющие одинаковую (параллельную) ориентировку, объединяют в системы трещин [1].

В горных породах обычно развиваются несколько систем трещин, которые пересекаясь, разделяют массив на блоки.

Приведем определения, которые будут использованы при математическом моделировании трещиноватости массива горных пород.

Частотой трещин [1] называют среднее количество трещин на погонный метр (либо на единицу длины) разреза в направлении перпендикулярном данной системе.

Интенсивностью трещиноватости [1] называют количество трещин на погонный метр (либо на единицу длины) разреза в любом направлении.

Плоскостью системы трещин назовём плоскость, проходящую через начало координат параллельно трещинам системы.

В основе изучения трещиноватости лежат замеры трещиноватости в точках пространства недр. Применительно к нашей задаче под точкой замера будем понимать некоторый объём в массиве горных пород достаточно большой для возможности определения угла падения, азимута простирания плоскости системы трещин, а также частоты системы трещин и достаточно малый по сравнению с оцениваемым массивом горных пород. В [1] приведена детерминированная модель трещиноватости массива горных пород, которая абсолютно точно описывает интенсивности трещиноватости идеальных систем трещин со строго параллельными плоскостями и равными расстояниями между ними, что в реальных условиях невыполнимо.

Разработанная ниже стохастическая модель, позволяет описывать реальную трещиноватость массива горных пород с учётом погрешности детерминированного моделирования. Систему трещин в пространстве отождествим со случайным вектором частоты трещин, характеристики которого (математическое ожидание и дисперсию) будем определять по замерам трещиноватости в точках недр. Каждому замеру поставим в соответствие значение случайного вектора, длина которого равна частоте трещин в точке замера, а направление совпадает с направлением нормали плоскости системы трещин в точке замера.

Пусть в исследуемой области пространства недр, характеризующееся **n** системами трещин (**i = 1, 2, …, n**), сделано по $\mathbf{n_j}$ (**j = 1, 2, …,** $\mathbf{n_i}$) замеров в каждой **i** - й системе трещин: $\boldsymbol{\omega_{ij}}$ – частота трещин; $\mathbf{A_{ij}}$, $\boldsymbol{\delta_{ij}}$ – соответственно азимут простирания и угол падения плоскости трещин в точке замера.

По определению плоскости системы трещин получим её нормальное уравнение в точке замера

$$-x\sin A_{ij}\sin\delta_{ij} + y\cos A_{ij}\sin\delta_{ij} + z\cos\delta_{ij} = 0\ , \tag{1}$$

из которого и определения случайного вектора частоты трещин следует его значение в точке замера

$$\overline{\omega} = \left(x_{ij}; y_{ij}; z_{ij}\right)\ , \tag{2}$$

где декартовы координаты определяются равенствами

$$\begin{cases} x_{ij} = -\omega_{ij}\sin A_{ij}\sin\delta_{ij}\ ; \\ y_{ij} = \omega_{ij}\cos A_{ij}\sin\delta_{ij}\ ; \\ z_{ij} = \omega_{ij}\cos\delta_{ij}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Оценкой **i**-й системы трещин и её математического эквивалента случайного вектора трещин будут средние значения замеров в $\mathbf{n_i}$ точках, которые обозначим через

$$M\overline{\omega} = \left(Mx_i; My_i; Mz_i\right),\quad i = 1,2,\ldots,n\ , \tag{4}$$

где

$$Mx_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\ ;\quad My_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\ ;\quad Mz_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}\ . \tag{5}$$

На основе оценки (4) интенсивность трещиноватости, порожденную **i**-й системой трещин, определим равенством [4] :

$$\mathbf{I_i(\bar{n}) = \left|np_{\bar{n}} M\bar{\omega}_i\right| = \left|M\bar{\omega}_i \bullet \bar{n}\right| = \left|Mx_i \cos\alpha + My_i \cos\beta + Mz_i \cos\gamma\right|}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$ – задающий направление в пространстве единичный вектор направляющих косинусов.

Тогда на основе формулы (6) интенсивность трещиноватости, индуцированная совокупностью n систем трещин, в направлении $\mathbf{n}$ равна

$$\mathbf{I(\bar{n}) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\bar{n}) = \sum_{i=1}^{n}\left|Mx_i \cos\alpha + My_i \cos\beta + Mz_i \cos\gamma\right|}, \qquad (7)$$

Выражение (7) может быть положено в основу решения большого количества практических задач, в том числе для определения экстремальных значений интенсивностей трещиноватости и направлений, по которым эти значения достигаются, определения средних размеров блока, его формы и ориентировки в пространстве.

Так как природные системы трещин не идеальны и для их определения использован выборочный метод статистики, то равенство (7) описывает интенсивность трещиноватости с погрешностью. Определим эту погрешность в классе нестационарных анизотропных моделей.

Обозначим через $\mathbf{\Delta\omega_{ij} = (\Delta x_{ij};\ \Delta y_{ij};\ \Delta z_{ij})}$ вектор отклонения между вектором частоты трещин в $\mathbf{j}$-й точке $\mathbf{i}$-й системы трещин и математическим ожиданием $\mathbf{i}$-й системы. Он равен

$$\mathbf{\Delta\bar{\omega}_{ij} = \bar{\omega}_{ij} - M\bar{\omega}_i = \left(x_{ij} - \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij};\quad y_{ij} - \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij};\quad z_{ij} - \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}\right)}. \qquad (8)$$

При этом $\mathbf{\Delta x_{ij} = x_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i}\frac{x_{ij}}{n_i};\quad \Delta y_{ij} = y_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i}\frac{y_{ij}}{n_i};\quad \Delta z_{ij} = z_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i}\frac{z_{ij}}{n_i}}$.

Найдём проекцию вектор - отклонения на направление
$\mathbf{n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$:

$$\mathbf{np_{\bar{n}}\Delta\bar{\omega}_{ij} = \Delta\bar{\omega}_{ij} \bullet \bar{n} = \Delta x_{ij}\cos\alpha + \Delta y_{ij}\cos\beta + \Delta z_{ij}\cos\gamma}. \qquad (9)$$

Возведём обе части равенства (9) в квадрат, просуммируем средние квадраты по всем точкам замеров $\mathbf{i}$-й системы трещин и получим дисперсию интенсивности трещиноватости $\mathbf{i}$-й системы в направлении $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{D_i(\bar{n}) = \bar{n} \bullet D_i \bullet \bar{n}^T,\quad i = 1,2,\ldots,n}, \qquad (10)$$

где $\mathbf{\bar{n}^T = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}}$ – транспонированный вектор направляющих косинусов $\mathbf{n}$.

Назовём $\mathbf{D_i}$ тензором погрешности интенсивности трещиноватости $\mathbf{i}$-й системы трещин, который при фиксированных осях координат представляется квадратной симметричной неособенной матрицей

$$\mathbf{D_i} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\Delta x_{ij}\right)^2 & \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta x_{ij}\Delta y_{ij} & \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta x_{ij} z_{ij} \\ \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta y_{ij}\Delta x_{ij} & \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\Delta y_{ij}\right)^2 & \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta y_{ij}\Delta z_{ij} \\ \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta y_{ij}\Delta z_{ij} & \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta z_{ij}\Delta y_{ij} & \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\Delta z_{ij}\right)^2 \end{Vmatrix}. \qquad (11)$$

Суммируя обе части равенства (10) по всем системам трещин, получим дисперсию $\mathbf{D}(\overline{\mathbf{n}}) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{D_i}(\overline{\mathbf{n}})$ интенсивности трещиноватости $\mathbf{n}$ систем трещин в направлении $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{D}(\overline{\mathbf{n}}) = \overline{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{D} \bullet \overline{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}. \qquad (12)$$

Назовём $\mathbf{D}$ тензором погрешности интенсивности трещиноватости, который также является квадратной симметричной неособенной матрицей

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\Delta x_{ij}\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta x_{ij}\Delta y_{ij} & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta x_{ij} z_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta y_{ij}\Delta x_{ij} & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\Delta y_{ij}\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta y_{ij}\Delta z_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta y_{ij}\Delta z_{ij} & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\Delta z_{ij}\Delta y_{ij} & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\Delta z_{ij}\right)^2 \end{Vmatrix}. \qquad (13)$$

Приведение матриц $\mathbf{Di}$ $\mathbf{(i=1, 2, \ldots, n)}$ и $\mathbf{D}$ к диагональному виду позволяет определить их собственные значения λ_k^i и λ_k $\mathbf{(k=1, 2, 3)}$, которые являются экстремальными значениями дисперсий, и соответствующие им собственные векторы $\mathbf{W_k^i}$ и $\mathbf{W_k}$, $\mathbf{(k=1, 2, 3)}$, представляющие направления экстремальных дисперсий.

Координаты собственных векторов являются решениями систем линейных однородных уравнений:

$$\left\| \left(\mathbf{D_i} - \lambda_k^{(i)}\mathbf{E}\right)\mathbf{W}_k^{(i)} \right\| = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} = 1,2,\ldots,\mathbf{n}\,;$$
$$\left\| \left(\mathbf{D} - \lambda_k \mathbf{E}\right)\mathbf{W_k} \right\| = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} = 1,2,3. \tag{14}$$

где λ_k^i – корни характеристических уравнений $|\mathbf{D_i} - \lambda_k\mathbf{E}| = \mathbf{0}$; λ_k – корни характеристического уравнения $|\mathbf{D} - \lambda_k\mathbf{E}| = \mathbf{0}$; **E** – единичная матрица.

Геометрическим аналогом тензоров (11) и (13) являются эллипсоиды в исследуемом пространстве, длины полуосей которых равны собственным числам и совпадают с направлениями собственных векторов. А дисперсии интенсивностей трещиноватости (10), (12) представляют в пространстве геометрические места проекций этих эллипсоидов на направления **n**.

Приведённая стохастическая модель может быть использована для дальнейшего изучения трещиноватости массива горных пород, а также положена в основу решений геомеханических, технологических и оптимизационных задач горнодобывающих и строительных предприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейштадт Л.И., Пирогов И.А. Методы инженерно - геологического изучения трещиноватости горных пород. – М.: Энергия, 1969. – 248 с.

2. Редькин Г.М. Аналитическое выражение интенсивности трещиноватости горных пород // Математическое моделирование технологических процессов в производстве строительных материалов и конструкций. – Белгород. – 1998. – С. 131 - 141.

Поступила в редколлегию 29.10.2001