

РОЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АНГАРМОНИЧЕСКИХ МОД В ЧАСТОТНОМ СПЕКТРЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.А. Ганенко, к.ф.-м.н. Т.В. Емельянова,
д.ф.-м.н. С.С. Недорезов, проф. В.Е. Пустоваров

Дальнейшее совершенствование методов стабилизации частоты кварцевых резонаторов взаимосвязано точным определением частот ангармонических собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов [1] и получением резонаторов с оптимальными характеристиками. Поэтому представляет интерес детальное изучение ангармонических колебаний, степень и роль их взаимодействия в формировании частотного спектра.

В рамках линейной пьезоэлектрической теории [2] было получено уравнение, описывающее собственные колебания выпуклых резонаторов:

$$\begin{aligned}
 & (\nu_m - \rho_m \omega^2) A_m + \widehat{L}_{mn} A_m + \\
 & + \sum_{n' \neq m} \frac{\widehat{L}_{mn'} \widehat{L}_{n'm}}{\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'}} A_m + \sum_{\substack{n' \neq m \\ n'' \neq m \\ n' \neq n''}} \frac{\widehat{L}_{mn'} \widehat{L}_{n'n''} \widehat{L}_{n''m}}{(\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'}) (\rho_{n''} \omega^2 - \nu_{n''})} = 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $\nu_m / \rho_m = \omega_m$ частота невозмущенной основной моды A_m .

Оператор $\widehat{L}_{mn'}$

$$\begin{aligned}
 \widehat{L}_{mn'} = & -b_{\alpha\beta}^{mn'} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_\alpha \partial \tilde{x}_\beta} + \left(a_{\alpha}^{mn'} - a_{\alpha}^{n'm} + \frac{1}{R} g_{\alpha\beta}^{mn'} \tilde{x}_\beta \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\alpha} + \\
 & + \frac{1}{R} \left(g_{\alpha\alpha}^{mn'} - d_{\alpha}^{mn'} \tilde{x}_\alpha - \frac{1}{R} f_{\alpha\beta}^{mn'} \tilde{x}_\alpha \tilde{x}_\beta \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

учитывает анизотропию и толщину пьезоэлектрика с радиусом кривизны R . "Одномодовый" оператор L_{mn} описывает изменение основной моды m .

Оператор $\widehat{L}_{mn'}$ с $m \neq n'$ описывает взаимодействие основной моды m с другой модой n' системы.

Поэтому в уравнении (1) оператор $\sum_{n' \neq m} \frac{\widehat{L}_{mn'} \widehat{L}_{n'm}}{\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'}}$ учитывает

"парное" взаимодействие основной моды m с модой n' , а оператор

$\sum_{\substack{n' \neq m \\ n'' \neq m \\ n' \neq n''}} \frac{\widehat{L}_{mn'} \widehat{L}_{n'm'} \widehat{L}_{n''m}}{(\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'}) \cdot (\rho_{n''} \omega^2 - \nu_{n''})}$ - “тройное” взаимодействие мод \mathbf{m} , \mathbf{n}' , \mathbf{n}'' и т. д.

Предложенная в [3] модель частотного спектра колебаний, соответствующая уравнению (1):

$$\omega_{\mathbf{km}}^2 = \sum_{\alpha, \beta} \Omega_{\alpha\beta m} k^{\alpha} l^{\beta}; \quad \Omega_{\alpha\beta m} = \frac{1}{(\sqrt{R})^{\alpha+\beta}} \sum_{p=0}^{\infty} \Omega_{\alpha\beta m}^{(p)} \frac{1}{(\sqrt{R})^p} \quad (3)$$

является неэквидистантной по квадрату частоты. Проанализируем роль взаимодействия мод в частотном спектре (3).

В уравнение (1) введем новые переменные: $x_{\alpha} = \tilde{x}_{\alpha} R^{-1/4}$; $x_{\beta} = \tilde{x}_{\beta} R^{-1/4}$; $x_{\gamma} = \tilde{x}_{\gamma} R^{-1/4}$, ... , соответствующие “изменению масштаба”.

В системе координат, оси (x,y) которой совпадают с собственными осями ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$) тензора $\mathbf{d}_{\alpha\beta}$

$$\mathbf{d}_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{mm}}{\rho_m} + \sum_{n' \neq m} \frac{(\mathbf{a}_{\alpha}^{mn'} - \mathbf{a}_{\alpha}^{n'm})(\mathbf{a}_{\beta}^{n'm} - \mathbf{a}_{\beta}^{mn'})}{\rho_m \nu_{n'} - \rho_{n'} \nu_m} \quad (4)$$

уравнение (3) удобно представить в виде

$$-\frac{\mathbf{d}_1}{\sqrt{R}} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial x^2} - \frac{\mathbf{d}_2}{\sqrt{R}} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial y^2} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{\sqrt{R}} (x^2 + y^2) \right) \mathbf{A}_m + \mathbf{W} \mathbf{A}_m = (\omega^2 + \Delta) \mathbf{A}_m. \quad (5)$$

Слагаемое $\mathbf{W} \mathbf{A}_m$ содержит члены уравнения, порядок которых меньше $1/\sqrt{R}$, а именно

$$\mathbf{W} \mathbf{A}_m = \frac{\mathbf{C} \mathbf{A}_m}{R^{3/4}} + \frac{\mathbf{B} \mathbf{A}_m}{R} + \frac{\mathbf{E} \mathbf{A}_m}{R^{5/4}} + \frac{\mathbf{D} \mathbf{A}_m}{R^{3/2}} + \dots \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \mathbf{A}_m = & -\frac{\mathbf{d}_{\alpha}^{mm} x_{\alpha} \mathbf{A}_m}{\rho_m} + \sum_{n' \neq m} \frac{\mathbf{a}_{\gamma}^{n'm} - \mathbf{a}_{\gamma}^{mn'}}{\rho_m \nu_{n'} - \rho_{n'} \nu_m} \left[(\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{mn'} - \mathbf{b}_{\alpha\beta}^{n'm}) - \right. \\ & \left. - \sum_{n'' \neq m} \frac{\rho_m (\mathbf{a}_{\alpha}^{n'n''} - \mathbf{a}_{\alpha}^{n''n'}) (\mathbf{a}_{\beta}^{n''m} - \mathbf{a}_{\beta}^{mn''})}{\rho_m \nu_{n''} - \rho_{n''} \nu_m} \right] \frac{\partial^3 \mathbf{A}_m}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}\mathbf{A}_m = & \frac{g_{\alpha\alpha}^{mm} \mathbf{A}_m + g_{\alpha\beta}^{mm} x_\beta \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial x_\alpha}}{\rho_m} + \\
& + \sum_{n' \neq m} \frac{1}{\rho_m v_{n'} - \rho_{n'} v_m} \left\{ d_\alpha^{mn'} (a_\gamma^{n'm} - a_\gamma^{mn'}) x_\alpha \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial x_\gamma} + \right. \\
& \quad \left. + (a_\gamma^{mn'} - a_\gamma^{n'm}) d_\alpha^{n'm} \frac{\partial (x_\alpha \mathbf{A}_m)}{\partial x_\gamma} - \left(b_{\alpha\beta}^{mn'} b_{\gamma\delta}^{n'm} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{n'' \neq m} \frac{\rho_m}{\rho_m v_{n''} - \rho_{n''} v_m} \left[(a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm}) (a_\gamma^{n'n''} - a_\gamma^{n''n'}) b_{\alpha\beta}^{n''m} + \right. \right. \quad (8) \\
& \quad \left. \left. + (a_\alpha^{mn''} - a_\alpha^{n''m}) (a_\gamma^{n'm} - a_\gamma^{mn'}) b_{\beta\delta}^{n'n''} + (a_\alpha^{n'n''} - a_\alpha^{n''n'}) (a_\gamma^{n''m} - a_\gamma^{mn''}) b_{\beta\delta}^{mn''} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{n'' \neq m} \frac{\rho_m (a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm}) (a_\beta^{n'n''} - a_\beta^{n''n'}) (a_\gamma^{n'n''} - a_\gamma^{n''n'}) (a_\delta^{n''m} - a_\delta^{mn''}) \right] \right\} \times \\
& \quad \times \frac{\partial^4 \mathbf{A}_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma \partial x_\delta}.
\end{aligned}$$

Оператор возмущения \mathbf{W} вносит поправку Δ в частотный спектр

$$\omega_{\mathbf{k}\mathbf{m}}^{2(0)} = \omega^2 + \sqrt{\frac{c d_1}{R}} (2l+1) + \sqrt{\frac{c d_2}{R}} (2k+1) \quad (9)$$

невозмущенной задачи

$$-d_1 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial x^2} - d_2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial y^2} + \left(\omega_m^2 + \frac{c}{R} (x^2 + y^2) \right) \mathbf{A}_m = \omega^2 \mathbf{A}_m. \quad (10)$$

Матричные элементы $\mathbf{W}_{\mathbf{k}\mathbf{l}m, \mathbf{k}'\mathbf{l}'m'}$ оператора \mathbf{W} равны

$$\mathbf{W}_{\mathbf{k}\mathbf{l}m, \mathbf{k}'\mathbf{l}'m'} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\mathbf{k}\mathbf{l}m} \mathbf{W} \Psi_{\mathbf{k}'\mathbf{l}'m'} dx dy, \quad (11)$$

где $\Psi_{\mathbf{k}\mathbf{l}m}(x, y)$ – собственные функции основного приближения, когда $\mathbf{A}_m^{(0)} = \Psi_{\mathbf{k}\mathbf{l}m}$, $\Psi_{\mathbf{k}\mathbf{l}m}(x, y) \equiv \Psi_1(x) \Psi_k(y)$;

$$\Psi_1(x) = \frac{2^{-1/2}}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{l!}} \left(\frac{c}{Rd_1} \right)^{1/4} e^{\frac{-x^2}{\sqrt[4]{4Rd_1}c}} H_1 \left(x \sqrt[4]{\frac{c}{Rd_1}} \right); \quad (12)$$

где $H_1(x)$ – функция Эрмита.

Матричные элементы оператора W записываются в виде разложения по малому параметру $1/R$:

$$W_{klm, k'l'm'} = \frac{1}{R/4} C_{klm, k'l'm'} + \frac{1}{R} B_{klm, k'l'm'} + \frac{1}{R/4} E_{klm, k'l'm'} + \frac{1}{R/4} D_{klm, k'l'm'} + \dots, \quad (13)$$

в котором:

$$\begin{aligned} C_{klm, k'l'm'} &\neq 0, & \text{если } k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3; \\ B_{klm, k'l'm'} &\neq 0, & \text{если } k - k' + l - l' = 0, \pm 2, \pm 4; \\ E_{klm, k'l'm'} &\neq 0, & \text{если } k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3, \pm 5; \\ &\dots \end{aligned}$$

Эти правила отбора связаны с соответствующими “переходами”.

Рассмотрим величину $C_{klm, k'l'm'}$. При $k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3$; возможны «переходы»:

- 1) $l = l', k - k' = \pm 1, \pm 3$;
- 2) $l = l' = \pm 1, \pm 3, k = k'$;
- 3) $k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3, k \neq k', l \neq l'$.

Из формулы (7) для CA_m следует, что оператор L_{mm} обуславливает только соседние переходы, когда $k - k' = \pm 1$, или $l = l' = \pm 1$. Двухмодовое и трехмодовое взаимодействие приводит к “парным” переходам с изменением чисел k, l .

В уравнение (5) входит тензор $d_{\alpha\beta}$ (4), одна часть $\frac{b_{\alpha\beta}^{mm}}{\rho_m}$ которого обусловлена “одномодовым” оператором L_{mm} , а другая часть

$$\sum_{n' \neq m} \frac{(a_{\alpha}^{mn'} - a_{\alpha}^{n'm}) \cdot (a_{\beta}^{n'm} - a_{\beta}^{mn'})}{\rho_m \nu_{n'} - \rho_{n'} \nu_m}$$

обусловлена парным взаимодействием мод.

Структура постоянных $\Omega_{\alpha\beta m}$ [4], используемых в выражении (3):

$$\omega_{km}^2 = \Omega_{00m} + \Omega_{10m}k + \Omega_{01m}l + \Omega_{20m}k^2 + \Omega_{11m}kl + \Omega_{02m}l^2 + \dots$$

даст возможность заключить, что на их величины существенным образом влияет не только двухмодовое взаимодействие, а и взаимодействие трех мод и более.

Таким образом, частотный спектр ω_{km}^2 (3) достаточно полно учитывает взаимодействие мод негармонических колебаний в выпуклом пьезоэлектрике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shmaliy Yu. S. *The modulational method of quartz crystal oscillator frequency stabilisation* // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. – 1998. – Vol. 45, № 6. – P. 1476 - 1484.
2. Nedorezov S. S., Ganenko E. A. *Frequency spectrum of the piezoelectric resonators* // Dopovidi NAN Ukraine. – 1996. – №10. – P.31 - 35. (in Ukrainian), Proc. of the Int. Symp. on AFSG (Moscow-St.Peterburg). – 1998. – P. 89 - 92.
3. Недорезов С.С. *Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов* // Известия вузов СССР. Радиофизика. – 1990. – №12. – С. 1417 - 1422.
4. Ганенко Е.А., Емельянова Т.В., Недорезов С.С., Пустоваров В.Е.. *Структура квазиэквиливантного частотного спектра локализованных колебаний пьезоэлектрических резонаторов* // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вип. 5(15). – С. 106 - 110.

Поступила 25.01.2002

ГАНЕНКО Елена Алексеевна, доцент Украинской инженерно - педагогической академии. В 1970 г. окончила Харьковский государственный университет им. М.Горького. Область научных интересов – пьезоэлектрические резонаторы.

Раб. тел. 206-432.

ЕМЕЛЬЯНОВА Татьяна Викторовна, канд. физ.- мат. наук, доцент Украинской инженерно - педагогической академии. В 1972 г. окончила Харьковский государственный университет им. М.Горького. Область научных интересов – пьезоэлектрические резонаторы.

Раб. тел. 206-432.

НЕДОРЕЗОВ Станислав Сергеевич, доктор физ.- мат. наук, зав. кафедрой Украинской инженерно - педагогической академии. В 1959 г. окончил Томский государственный университет. Область научных интересов – пьезоэлектрические резонаторы.

Раб. тел. 206-432.

ПУСТОВАРОВ Владимир Евгеньевич, канд. техн. наук, профессор, профессор Украинской инженерно - педагогической академии. В 1961 году окончил Харьковское высшее авиационно - инженерное военное училище. Область научных интересов – радиоэлектроника и электроэнергетика.

Раб. тел. 206-356. E-mail: vladimir@ic.kharkov.ua.