УДК 521.372.412:537.226.86

РОЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АНГАРМОНИЧЕСКИХ МОД В ЧАСТОТНОМ СПЕКТРЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.А. Ганенко, к.ф.-м.н. Т.В. Емельянова,
д.ф.-м.н. С.С. Недорезов, проф. В.Е. Пустоваров

Дальнейшее совершенствование методов стабилизации частоты кварцевых резонаторов взаимосвязано точным определением частот ангармонических собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов [1] и получением резонаторов с оптимальными характеристиками. Поэтому представляет интерес детальное изучение ангармонических колебаний, степень и роль их взаимодействия в формировании частотного спектра.

В рамках линейной пьезоэлектрической теории [2] было получено уравнение, описывающее собственные колебания выпуклых резонаторов:

$$(\nu_m - \rho_m \omega^2) A_m + \widehat{L}_{mn} A_m +$$
$$+ \sum_{n' \neq m} \frac{\widehat{L}_{mn'} \widehat{L}_{n'm}}{\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'}} A_m + \sum_{\substack{n' \neq m \\ n'' \neq m \\ n' \neq n''}} \frac{\widehat{L}_{mn'} \widehat{L}_{n'n''} \widehat{L}_{n''m}}{(\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{n'})(\rho_{n''} \omega^2 - \nu_{n''})} = 0, \quad (1)$$

где $\nu_m / \rho_m = \omega_m$ частота невозмущенной основной моды $\mathbf{A_m}$.

Оператор $\widehat{L}_{mn'}$

$$\widehat{L}_{mn'} = -b_{\alpha\beta}^{mn'} \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{x}_\alpha \partial \widetilde{x}_\beta} + \left(a_\alpha^{mn'} - a_\alpha^{n'm} + \frac{1}{R} g_{\alpha\beta}^{mn'} \widetilde{x}_\beta \right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{R} \left(g_{\alpha\alpha}^{mn'} - d_\alpha^{mn'} \widetilde{x}_\alpha - \frac{1}{R} f_{\alpha\beta}^{mn'} \widetilde{x}_\alpha \widetilde{x}_\beta \right) \quad (2)$$

учитывает анизотропию и толщину пьезоэлектрика с радиусом кривизны **R**. ”Одномодовый” оператор $\mathbf{L_{mn}}$ описывает изменение основной моды **m**.

Оператор $\widehat{L}_{mn'}$ с $\mathbf{m \neq n'}$ описывает взаимодействие основной моды **m** с другой модой **n′** системы.

Поэтому в уравнении (1) оператор $\sum_{n' \neq m} \frac{\widehat{L}_{mn'} \widehat{L}_{n'm}}{\rho_{n'} \omega^2 - \nu_{T'}}$ учитывает “парное” взаимодействие основной моды **m** с модой **n′**, а оператор

$$\sum_{\substack{n'\neq m\\ n''\neq m\\ n'\neq n''}} \frac{\widehat{L}_{mn'}\widehat{L}_{n'm'}\widehat{L}_{n''m}}{(\rho_{n'}\omega^2-\nu_{n'})\cdot(\rho_{n''}\omega^2-\nu_{n''})}$$ - “тройное” взаимодействие мод $\mathbf{m}$, $\mathbf{n'}$, $\mathbf{n''}$ и т. д.

Предложенная в [3] модель частотного спектра колебаний, соответствующая уравнению (1):

$$\omega^2_{klm} = \sum_{\alpha,\beta}\Omega_{\alpha\beta m}k^{\alpha}l^{\beta}; \qquad \Omega_{\alpha\beta m} = \frac{1}{(\sqrt{R})^{\alpha+\beta}}\sum_{p=0}^{\infty}\Omega^{(p)}_{\alpha\beta m}\frac{1}{(\sqrt{R})^{p}} \tag{3}$$

является неэквидистантной по квадрату частоты. Проанализируем роль взаимодействия мод в частотном спектре (3).

В уравнение (1) введем новые переменные: $x_{\alpha} = \tilde{x}_{\alpha}R^{-1/4}$; $x_{\beta} = \tilde{x}_{\beta}R^{-1/4}$; $x_{\gamma} = \tilde{x}_{\gamma}R^{-1/4}$, ... , соответствующие “изменению масштаба”.

В системе координат, оси $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ которой совпадают с собственными осями $(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2})$ тензора $d_{\alpha\beta}$

$$d_{\alpha\beta} = \frac{b^{mm}_{\alpha\beta}}{\rho_m} + \sum_{n'\neq m}\frac{\left(a^{mn'}_{\alpha} - a^{n'm}_{\alpha}\right)\left(a^{n'm}_{\beta} - a^{mn'}_{\beta}\right)}{\rho_m\nu_{n'} - \rho_{n'}\nu_m} \tag{4}$$

уравнение (3) удобно представить в виде

$$-\frac{d_1}{\sqrt{R}}\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} - \frac{d_2}{\sqrt{R}}\frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + \left(\omega^2_m + \frac{c}{\sqrt{R}}\left(x^2+y^2\right)\right)A_m + WA_m = \left(\omega^2+\Delta\right)A_m. \tag{5}$$

Слагаемое $\mathbf{WA_m}$ содержит члены уравнения, порядок которых меньше $1/\sqrt{R}$, а именно

$$WA_m = \frac{CA_m}{R^{3/4}} + \frac{BA_m}{R} + \frac{EA_m}{R^{5/4}} + \frac{DA_m}{R^{3/2}} + \ldots \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} CA_m = -\frac{d^{mm}_{\alpha}x_{\alpha}A_m}{\rho_m} + \sum_{n'\neq m}\frac{a^{n'm}_{\gamma} - a^{mn'}_{\gamma}}{\rho_m\nu_{n'} - \rho_{n'}\nu_m}\Bigg[\left(b^{mn'}_{\alpha\beta} - b^{n'm}_{\alpha\beta}\right) - \\ - \sum_{n''\neq m}\frac{\rho_m\left(a^{n'n''}_{\alpha} - a^{n''n'}_{\alpha}\right)\left(a^{n''m}_{\beta} - a^{mn''}_{\beta}\right)}{\rho_m\nu_{n''} - \rho_{n''}\nu_m}\Bigg]\frac{\partial^3 A_m}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}\partial x_{\gamma}}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{BA_m} = {} & \frac{g^{mm}_{\alpha\alpha} A_m + g^{mm}_{\alpha\beta} x_\beta \dfrac{\partial A_m}{\partial x_\alpha}}{\rho_m} + \\
& + \sum_{n'\neq m} \frac{1}{\rho_m v_{n'} - \rho_{n'} v_m} \left\{ d^{mn'}_\alpha \left(a^{n'm}_\gamma - a^{mn'}_\gamma \right) \; x_\alpha \frac{\partial A_m}{\partial x_\gamma} + \right. \\
& + \left(a^{mn'}_\gamma - a^{n'm}_\gamma \right) d^{n'm}_\alpha \frac{\partial \left(x_\alpha A_m \right)}{\partial x_\gamma} - \left(b^{mn'}_{\alpha\beta} b^{n'm}_{\gamma\delta} \quad + \right. \\
& + \sum_{n'\neq m} \frac{\rho_m}{\rho_m v_{n'} - \rho_{n'} v_m} \left[\left(a^{mn'}_\alpha - a^{n'm}_\alpha \right) \left(a^{n'n''}_\gamma - a^{n''n'}_\gamma \right) b^{n''m}_{\alpha\beta} \quad + \right. \qquad (8) \\
& + \left(a^{mn'}_\alpha - a^{n'm}_\alpha \right) \cdot \left(a^{n'm}_\gamma - a^{mn'}_\gamma \right) b^{n'n''}_{\beta\delta} + \left(a^{n'n''}_\alpha - a^{n''n'}_\alpha \right) \cdot \left(a^{n''m}_\gamma - a^{mn'}_\gamma \right) b^{mn'}_{\beta\delta} + \\
& \left. \left. \left. + \sum_{n''\neq m} \frac{\rho_m \left(a^{mn'}_\alpha - a^{n'm}_\alpha \right) \left(a^{n'n''}_\beta - a^{n''n'}_\beta \right) \left(a^{n'n''}_\gamma - a^{n''n'}_\gamma \right) \left(a^{n''m}_\delta - a^{mn''}_\delta \right)}{\rho_m v_{n''} - \rho_{n''} v_m} \right] \right) \right\} \times \\
& \times \frac{\partial^4 A_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma \partial x_\delta}.
\end{aligned}
$$

Оператор возмущения $\mathbf{W}$ вносит поправку $\boldsymbol{\Delta}$ в частотный спектр

$$
\omega^{2(0)}_{klm} = \omega^2 + \sqrt{\frac{cd_1}{R}} \left(2l + 1 \right) + \sqrt{\frac{cd_2}{R}} \left(2k + 1 \right) \qquad (9)
$$

невозмущенной задачи

$$
- d_1 \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} - d_2 \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + \left(\omega^2_m + \frac{c}{R} \left(x^2 + y^2 \right) \right) A_m = \omega^2 A_m . \qquad (10)
$$

Матричные элементы $\mathbf{W}_{klm,\,k'l'm'}$ оператора $\mathbf{W}$ равны

$$
W_{klm,k'l'm'} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{klm} W \Psi_{k'l'm'} dx\, dy, \qquad (11)
$$

где $\psi_{klm}(x,y)$ – собственные функции основного приближения, когда $A^{(0)}_m = \Psi_{klm}$, $\Psi_{klm}(x,y) \equiv \Psi_l(x)\Psi_k(y)$;

$$\Psi_l(x)=\frac{2^{-1/2}}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{l!}}\left(\frac{c}{Rd_1}\right)^{1/4} e^{\frac{-x^2}{\sqrt{\frac{4Rd_1}{c}}}} H_l\left(x\sqrt[4]{\frac{c}{Rd_1}}\right); \tag{12}$$

где $H_l(x)$ – функция Эрмита.

Матричные элементы оператора W записываются в виде разложения по малому параметру $1/R$:

$$\begin{aligned} W_{klm,k'l'm'} &= \frac{1}{R^{3/4}} C_{klm,k'l'm'} + \frac{1}{R} B_{klm,k'l'm'} + \\ &+ \frac{1}{R^{5/4}} E_{klm,k'l'm'} + \frac{1}{R^{6/4}} D_{klm,k'l'm'} + \ldots, \end{aligned} \tag{13}$$

в котором:

$C_{klm,k'l'm'} \neq 0$, если $k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3$;

$B_{klm,k'l'm'} \neq 0$, если $k - k' + l - l' = 0, \pm 2, \pm 4$;

$E_{klm,k'l'm'} \neq 0$, если $k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3, \pm 5$;

… .

Эти правила отбора связаны с соответствующими “переходами”.

Рассмотрим величину $C_{klm,k'l'm'}$. При $k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3;$ возможны «переходы»:

1) $l = l'$, $k - k' = \pm 1, \pm 3$;

2) $l = l' = \pm 1, \pm 3$, $k = k'$;

3) $k - k' + l - l' = \pm 1, \pm 3$, $k \neq k'$, $l \neq l'$.

Из формулы (7) для CA_m следует, что оператор L_{mm} обуславливает только соседние переходы, когда $k - k' = \pm 1$, или $l = l' = \pm 1$. Двухмодовое и трехмодовое взаимодействие приводит к “парным” переходам с изменением чисел k, l.

В уравнение (5) входит тензор $d_{\alpha\beta}$ (4), одна часть $\frac{b^{mm}_{\alpha\beta}}{\rho_m}$ которого обусловлена “одномодовым” оператором L_{mm}, а другая часть

$$\sum_{n'\neq m} \frac{\left(a^{mn'}_{\alpha} - a^{n'm}_{\alpha}\right)\cdot\left(a^{n'm}_{\beta} - a^{mn'}_{\beta}\right)}{\rho_m \nu_{n'} - \rho_{n'} \nu_m}$$

обусловлена парным взаимодействием мод.

Структура постоянных $\Omega_{\alpha\beta m}$ [4], используемых в выражении (3):

$$\omega_{klm}^2 = \Omega_{00m} + \Omega_{10m}k + \Omega_{01m}l + \Omega_{20m}k^2 + \Omega_{11m}kl + \Omega_{02m}l^2 + \ldots$$

даст возможность заключить, что на их величины существенным образом влияет не только двухмодовое взаимодействие, а и взаимодействие трех мод и более.

Таким образом, частотный спектр ω_{klm}^2 (3) достаточно полно учитывает взаимодействие мод негармонических колебаний в выпуклом пьезоэлектрике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shmaliy Yu. S. The modulational method of quartz crystal oscillator frequency stabilisation // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. – 1998. – Vol. 45, № 6. - P. 1476 - 1484.*
2. *Nedorezov S. S., Ganenko E. A. Frequency spectrum of the piezoelectric resonators // Dopovidi NAN Ukraine. –1996. - №10. – P.31 - 35. (in Ukrainian), Proc. of the Int. Symp. on AFSG (Moscow-St.Peterburg). – 1998.- P. 89 - 92.*
3. *Недорезов С.С. Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов // Известия вузов СССР. Радиофизика. – 1990. – №12. – С. 1417 - 1422.*
4. *Ганенко Е.А., Емельянова Т.В., Недорезов С.С., Пустоваров В.Е.. Структура квазиэквидистантного частотного спектра локализованных колебаний пьезоэлектрических резонаторов // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вип. 5(15). – С. 106 - 110.*

Поступила 25.01.2002

ГАНЕНКО Елена Алексеевна, *доцент Украинской инженерно - педагогической академии. В 1970 г. окончила Харьковский государственный университет им. М.Горького. Область научных интересов – пьезоэлектрические резонаторы.*

Раб. тел. 206-432.

ЕМЕЛЬЯНОВА Татьяна Викторовна, *канд. физ.- мат. наук, доцент Украинской инженерно - педагогической академии. В 1972 г. окончила Харьковский государственный университет им. М.Горького. Область научных интересов – пьезоэлектрические резонаторы.*

Раб. тел. 206-432.

НЕДОРЕЗОВ Станислав Сергеевич, *доктор физ.- мат. наук, зав. кафедрой Украинской инженерно - педагогической академии. В 1959 г. окончил Томский государственный университет. Область научных интересов – пьезоэлектрические резонаторы.*

Раб. тел. 206-432.

ПУСТОВАРОВ Владимир Евгеньевич, *канд. техн. наук, профессор, профессор Украинской инженерно - педагогической академии. В 1961 году окончил Харьковское высшее авиационно - инженерное военное училище. Область научных интересов – радиоэлектроника и электроэнергетика.*

Раб. тел. 206-356. E-mail: vladimir@ic.kharkov.ua.