УДК 681.51

ВЫБОР НОМИНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ ДОСТИЖИМОСТИ В ЗАДАЧАХ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

к.т.н. В.И. Кортунов, В.И. Петренко, И.Ю. Дыбская
(представил д.т.н., проф. В.М. Вартанян)

Рассматриваются методы выбора номинальных или упрощенных моделей динамических объектов для создания робастных систем наблюдения и управления. Предлагается метод синтеза номинальных моделей по критерию оптимальной достижимости для обеспечении максимальных свойств робастности.

Введение. В системах управления с внутренними моделями номинальная модель (НМ) является одним из центральных элементов в алгоритмах управления и контроля, определяющая динамические свойства всей системы. Соответствие НМ объекту, целям и задачам управления, имеющимся ограничениям, техническим средствам реализации может выполниться при определенных её свойствах. Так, точное описание многих объектов можно представлять системой нелинейных дифференциальных уравнений, а большинство инженерных требований удовлетворяется линейными системами не выше второго порядка [1]. Если следовать выводам теории эталонных моделей для адаптивных систем, когда порядки объекта и номинальной модели должны совпадать для сходимости алгоритмов адаптации [2] то очевидно, что в этом направлении отсутствует конструктивное решение задач управления с моделью. Для робастных методов управления с НМ важным является сохранение свойств устойчивости управления при множественной параметрической неопределенности объекта [3]. Выполнить противоречивые требования к НМ: достаточная простота и требуемые запасы устойчивости системы управления – непростая задача. Однако, многими исследователями отмечалось, что для систем с сигнальной адаптацией или компенсацией возмущений возможно управление по номинальной или упрощенной модели с требуемыми показателями качества [4].

Основные методы получения упрощенных или моделей сравнения изложены в монографии [4], которые позволяют получать верхние и нижние оценки модели сравнения. Такой подход конструктивен для разрешимости задач качественного анализа – определения устойчивости или управляемости сложного объект по упрощенной модели. Задачи робастного управления с внутренней моделью требуют более тщательного подхода к выбору НМ, так как необходимо обеспечивать количественные показатели системы управления по точности, нечувствительности к параметрическим возмущениям и др.

В настоящей работе излагаются аналитический и вычислительный способы получения упрощенных или номинальных моделей в задачах робастного управления и наблюдения, основанные на декомпозиции и последующей редукции моделей.

1. Аналитический способ получения НМ. Данный способ основан на структурном синтезе, используя декомпозицию, линеаризацию и редукцию модели.

Структурный синтез НМ. Пусть описание управляемого объекта предполагаем в форме системы нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{gathered}\mathbf{x_0(t) = f(x_0(t), u(t), v_0(t), \Theta(t), t)};\\ \mathbf{y_0(t) = g(x_0(t), u(t), v_0(t), \Theta(t), t) + \xi(t)};\\ \mathbf{x_0(t_0) = x_0},\end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbf{x_0(t)}$ – вектор состояния объекта размерности $\mathbf{dim(x_0) = n_x^0}$; $\mathbf{y_0(t)}$ – вектор выхода размерности $\mathbf{dim(y_0) = n_y^0}$; $\mathbf{u(t)}$ – вектор управления объектом размерности $\mathbf{dim(u)}$ и $\mathbf{u(t) \in L_2}$; $\mathbf{v_0(t)}$ – вектор параметров неконтролируемых внешних возмущений размерности $\mathbf{dim(v_0) = n_v^0}$ и $\mathbf{v_0(t) \in L_2}$; $\mathbf{\Theta(t)}$ – вектор параметров системы, в общем случае нестационарный и ограниченный $\mathbf{\Theta(t) \in \Omega_\Theta}$; $\mathbf{dim(\Theta) = N_0}$; $\mathbf{\Omega_\Theta}$ – область возможных значений параметров; $\mathbf{f(\cdot)}$, $\mathbf{g(\cdot)}$ – вектор - функции уравнений состояния и наблюдения, отвечающие условиям единственности решения системы; $\mathbf{\xi(t)}$ – случайный вектор измерительных помех, который статистически не связан с вектором возмущения; $\mathbf{t}$ – параметр времени и $\mathbf{t \in [t_0, t_k]}$ – интервал времени функционирования объекта; $\mathbf{L_2}$ – пространство интегрируемых с квадратом функций.

Модель вида (1) используется для описания различных управляемых динамических объектов и процессов, но её прямое применение в таком виде является во многих задачах не конструктивным, поскольку, кроме нелинейностей и нестационарностей, эта модель может содержать интервальные или множественные параметры. Для решения задач синтеза и анализа систем управления часто используемыми являются стационарные линейные или нелинейные модели как наиболее конструктивные при проектировании. Выделим из нелинейной модели (1) номинальную линейную часть с фиксированными параметрами, для того чтобы воспользоваться методами теории синтеза и анализа линейных управляемых систем как наиболее разработанного раздела теории управления [5].

Считаем, что номинальная модель должна удовлетворять следующим требованиям: 1) обеспечения заданного уровня адекватности или соответствия поведения модели и объекта; 2) достаточной простоте с сохранением уровня адекватности; 3) полноте, как свойству отображения моделью существенных характеристик ОУ.

Процедура структурного синтеза состоит из ряда промежуточных этапов, связанных с получением декомпозируемой нелинейной и аппроксимированной линейной моделей.

Этап 1. Получение декомпозируемой нелинейной номинальной модели. Декомпозируем модель (1) на две части, соответствующие двум группам параметров состояния, управления и возмущения. Первая группа образует вектор состояния, компоненты которого связаны с состоянием рассматриваемых в объекте существенных элементов, входного вектора управления и неконтролируемого вектора возмущения. Декомпозиция модели соответствует разделению динамики на главные (учитываемые) и не главные (не учитываемые) компоненты вектора состояния для упрощения структуры НМ. Для декомпозиции необходимо выполнение следующего предположения.

Предположение 1. Модель объекта (1) опускает декомпозицию правых частей при декомпозиции полного вектора состояния.

Тогда справедливо представление:

$$\mathbf{f}^{T}(\mathbf{x_0},\mathbf{u},\mathbf{v_0},\Theta,\mathbf{t})=\left[\left(\mathbf{f}^{1}\left(\mathbf{x}_0^1,\mathbf{x}_0^2,\mathbf{u},\mathbf{v_0},\Theta^1,\mathbf{t}\right)\right)^{T}\left(\mathbf{f}^{2}\left(\mathbf{x}_0^1,\mathbf{x}_0^2,\mathbf{u},\mathbf{v_0},\Theta^2,\mathbf{t}\right)\right)^{T}\right];$$

$$\mathbf{g}^{T}(\mathbf{x_0},\mathbf{u},\mathbf{v_0},\Theta,\mathbf{t})=\left[\left(\mathbf{g}^{1}\left(\mathbf{x}_0^1,\mathbf{u},\mathbf{v_0},\Theta^1,\mathbf{t}\right)\right)^{T}\left(\mathbf{g}^{2}\left(\mathbf{x}_0^2,\mathbf{u},\mathbf{v_0},\Theta^2,\mathbf{t}\right)\right)^{T}\right],$$

где $\left\{\mathbf{x}_0^1,\Theta^1\right\}$, $\left\{\mathbf{x}_0^2,\Theta^2\right\}$ – первая и вторая группа векторов состояния и параметров; $\left\{\mathbf{f}_0^1,\mathbf{g}^1\right\}$, $\left\{\mathbf{f}_0^2,\mathbf{g}^2\right\}$ – декомпозируемые группы векторов правых частей исходной системы.

Соответствующая нелинейная декомпозированная НМ с фиксированным вектором $\left[\Theta_{\text{н}}^1\Theta_{\text{н}}^2\right]\in\Omega_\Theta$ параметров принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_{\text{н}}^1\\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{н}}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{f}^1\left(\mathbf{x}_{\text{н}}^1,\mathbf{x}_{\text{н}}^2,\mathbf{u},\Theta_{\text{н}}^1,\mathbf{t}\right)\\ \mathbf{f}^2\left(\mathbf{x}_{\text{н}}^1,\mathbf{x}_{\text{н}}^2,\mathbf{u},\Theta_{\text{н}}^2,\mathbf{t}\right)\end{bmatrix};\quad \begin{matrix}\mathbf{x}_{\text{н}}^1(\mathbf{t_0})=\mathbf{x}_{\text{н}0}^1;\\ \mathbf{x}_{\text{н}}^2(\mathbf{t_0})=\mathbf{x}_{\text{н}0}^2,\end{matrix}$$

$$\mathbf{y}_{\text{н}}^{\mathbf{g}}(\mathbf{t})=\mathbf{g}\left(\mathbf{x}_{\text{н}}^1,\mathbf{x}_{\text{н}}^2,\mathbf{u},\Theta_{\text{н}}^1,\Theta_{\text{н}}^2,\mathbf{t}\right),$$

где индекс $_{\text{н}}$ обозначает векторы НМ. Считаем, что существует вектор управления $\mathbf{u}_{\text{н}}(\mathbf{t})+\Delta\mathbf{u}(\mathbf{t})\in\mathbf{L_2}$, для которого выполняется близость моделей по функциональной норме

$$\left\|\mathbf{y_0}(\mathbf{t})-\mathbf{y}_{\text{н}}^{\mathbf{g}}(\mathbf{t})\right\|_{\mathbf{L_2}}<\Delta\mathbf{y},$$

где $\Delta_{\mathbf{y}}$ – уровень согласованности моделей.

Этап 2. Получение декомпозируемой линейной номинальной модели. В соответствии с предположением 1 и аналитичности нелинейных вектор - функций правой части системы (1) представим их в виде ряда Тейлора. Так, для первой компоненты $\mathbf{f}^1(\cdot)$ вектор - функции запишем

$$\mathbf{f}^1\left(\mathbf{x}_0^1,\mathbf{x}_0^2,\mathbf{u},\mathbf{v}_0,\Theta^1,\mathbf{t}\right)=\mathbf{f}_н^1\left(\mathbf{x}_н^1,\mathbf{x}_н^2,\mathbf{u}_н,\Theta_н^1,\mathbf{t}\right)+\left(\frac{\partial\mathbf{f}^1}{\partial\Theta^1}\right)_н^{\mathbf{T}}\Delta\Theta^1+\left(\frac{\partial\mathbf{f}^1}{\partial\mathbf{x}_0^1}\right)_н^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{x}^1+$$
$$+\left(\frac{\partial\mathbf{f}^1}{\partial\mathbf{x}_0^2}\right)_н^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{x}^2+\left(\frac{\partial\mathbf{f}^1}{\partial\mathbf{u}}\right)_н^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{u}+\left(\frac{\partial\mathbf{f}^1}{\partial\mathbf{v}_0}\right)_н^{\mathbf{T}}\mathbf{v}_0+\mathbf{R}_\mathbf{f}^1\left(\Theta_н^1,\mathbf{x}_н^1,\mathbf{x}_н^2,\mathbf{u}_н,\mathbf{v}_0\right), \quad (2)$$

где $\Delta\mathbf{x}^1(\mathbf{t})=\mathbf{x}_0^1(\mathbf{t})-\mathbf{x}_н^1(\mathbf{t})$; $\Delta\mathbf{x}^2(\mathbf{t})=\mathbf{x}_0^2(\mathbf{t})-\mathbf{x}_н^2(\mathbf{t})$; $\Delta\Theta^1(\mathbf{t})=\Theta^1-\Theta_н^1$ - векторы отклонений текущих значений от номинальных; $\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}}\right)_н^{\mathbf{T}}$ - матрица Якоби для номинальной траектории; $\mathbf{R}_\mathbf{f}^1\left(\Theta_н^1,\mathbf{x}_н^1,\mathbf{x}_н^2,\mathbf{v}_0\right)$ - остаточные члены ряда высших порядков малости.

Если слагаемые выражения (2) представить в линейном виде, то:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_0^1(\mathbf{t})\\ \dot{\mathbf{x}}_0^2(\mathbf{t})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^н & \mathbf{A}_{12}^н\\ \mathbf{A}_{21}^н & \mathbf{A}_{22}^н\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0^1(\mathbf{t})\\ \mathbf{x}_0^2(\mathbf{t})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{12}\\ \Delta\mathbf{A}_{21} & \Delta\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_н^1(\mathbf{t})\\ \mathbf{x}_н^2(\mathbf{t})\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{1u}^н\\ \mathbf{B}_{2u}^н\end{bmatrix}\left(\mathbf{u}_н(\mathbf{t})+\Delta\mathbf{u}(\mathbf{t})\right)+\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{B}_{1u}\\ \Delta\mathbf{B}_{2u}\end{bmatrix}\mathbf{u}_н(\mathbf{t})+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{1v}^н\\ \mathbf{B}_{2v}^н\end{bmatrix}\mathbf{v}_2(\mathbf{t}), \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_2(\mathbf{t})$ – расширенный вектор эквивалентных возмущений.

Уравнения линейной декомпозированной НМ следуют из (3):

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_н^1(\mathbf{t})\\ \dot{\mathbf{x}}_н^2(\mathbf{t})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^н & \mathbf{A}_{12}^н\\ \mathbf{A}_{21}^н & \mathbf{A}_{22}^н\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_н^1(\mathbf{t})\\ \mathbf{x}_н^2(\mathbf{t})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{1u}^н\\ \mathbf{B}_{2u}^н\end{bmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{t});$$
$$\mathbf{y}_н^{12}(\mathbf{t})=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^н & \mathbf{C}_2^н\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_н^1(\mathbf{t})\\ \mathbf{x}_н^2(\mathbf{t})\end{bmatrix}+\mathbf{D}_\mathbf{u}^н\mathbf{u}(\mathbf{t}). \quad (4)$$

Этап 3. Синтез редуцированной линейной номинальной модели. Систему уравнений для редуцированной модели запишем только с вектором учитываемых переменных состояния $\mathbf{x}_н(\mathbf{t})=\mathbf{x}_0^1(\mathbf{t})$; $\mathbf{f}_н(\mathbf{t}) = \mathbf{f}^1(\mathbf{t})$; $\mathbf{g}_н(\mathbf{t}) = \mathbf{g}^1(\mathbf{t})$ и $\mathbf{A}^н=\mathbf{A}_{11}^н$; $\mathbf{B}^н=\mathbf{B}_{11}^н$; $\mathbf{C}^н=\mathbf{C}_{11}^н$ в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{x}}_н(\mathbf{t})=\mathbf{A}^н\mathbf{x}_н(\mathbf{t})+\mathbf{B}_\mathbf{u}^н\mathbf{u}(\mathbf{t});$$
$$\mathbf{y}_н(\mathbf{t})=\mathbf{C}^н\mathbf{x}_н(\mathbf{t})+\mathbf{D}_\mathbf{u}^н\mathbf{u}(\mathbf{t}). \quad (5)$$

Представим модель объекта через линейную НМ (5) так:

$$\dot{\mathbf{x}}_н(\mathbf{t})=\mathbf{A}^н\mathbf{x}(\mathbf{t})+\mathbf{B}_\mathbf{u}^н\left(\mathbf{u}_н(\mathbf{t})+\Delta\mathbf{u}(\mathbf{t})\right)+\mathbf{B}_\mathbf{v}^н(\mathbf{t});$$
$$\mathbf{y}(\mathbf{t})=\mathbf{C}^н\mathbf{x}(\mathbf{t})+\mathbf{D}_\mathbf{u}^н\left(\mathbf{u}_н(\mathbf{t})+\Delta\mathbf{u}(\mathbf{t})\right)+\mathbf{D}_\mathbf{v}^н\mathbf{v}(\mathbf{t})+\xi(\mathbf{t}), \quad (6)$$

где эквивалентные возмущения представлены вектором $\mathbf{v(t)}$ и обозначены:

$$\mathbf{B_v^н v(t) = \Delta A_{11} x_н^1(t) + \Delta B_{1u} u_н(t) + A_{12}^н x_0^2(t) + B_{1v}^н v_1(t)};$$

$$\mathbf{D_v^н v(t) = \Delta C_1 x_н^1(t) + C_н^2 x_0^2(t) + \Delta D_{1u} u_н(t) + D_{1v}^н v_1(t)}.$$

Аналогичное представление можно получить для нелинейной НМ:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\dot{x}(t) = f_н(x, \Theta_н, t) + B_u^н(u_н(t) + \Delta u(t)) + B_v^н v(t);} \\ &\mathbf{y(t) = g_н(x, \Theta_н, t) + D_u^н(u_н(t) + \Delta u(t)) + D_v^н v(t) + \xi(t).} \end{aligned} \tag{7}$$

Систему уравнений (6) называем редуцированной возмущенной линейной НМ объекта, а систему (7) соответственно редуцированной возмущенной нелинейной НМ.

Недостающую информацию о векторе $\mathbf{v(t)}$ называем функциональной неопределенностью для соответствующей НМ.

Вектор эквивалентных возмущений $\mathbf{v(t)}$ в модели (7) может аккумулировать различные виды неопределенностей: параметрические возмущения (при отклонении параметров объекта от номинального режима); различие нелинейных характеристик исходной и номинальной систем; неучтенную динамику переменных состояния $\mathbf{x_0^2(t)}$; внешние возмущения объекта управления $\mathbf{v_0(t)}$.

Описанный способ позволяет получать НМ, опираясь на опыт и знания разработчика, и в большинстве случаев выполняется без инструментальных средств с большими затратами интеллектуального труда. Данный способ часто используется для синтеза моделей изолированных движений летательного аппарата, разделения динамики робота-манипулятора на быстрые и медленные движения (сингулярно возмущенных систем) и др.

2. Вычислительный способ получения НМ. Этот способ основан на вычислительных методах линеаризации и редукции моделей и использует современные инструментальные средства синтеза и моделирования. Рассмотрим эти методы на примере вычислительной системы MatLab и подсистемы моделирования Simulink.

Исходную модель объекта можно создать в среде Simulink графическими средствами из типовых блоков библиотек, содержащих свыше сотни используемых в структурных схемах блоках – линейные динамические, нелинейные статические звенья, генераторы, осциллографы и др. [6]. Созданная в программном варианте модель объекта должна содержать входные и выходные порты, соответствующие входам и выходам объекта. Процедура синтеза НМ по программной модели содержит два основных этапа – вычислительная линеаризация и редукция линейной модели.

Вычислительная линеаризация. Данная процедура осуществляет вычисление коэффициентов модели при компонентах векторов состояния и управления на опорной траектории путем формирования разделенных разностей:

$$\mathbf{a_{ij}} = \left.\frac{\Delta \mathbf{f_i}}{\Delta \mathbf{x_j}}\right|_{\substack{\mathbf{x^*},\\ \mathbf{u^*}}}; \mathbf{b^u_{ij}} = \left.\frac{\Delta \mathbf{f_i}}{\Delta \mathbf{u_j}}\right|_{\substack{\mathbf{x^*},\\ \mathbf{u^*}}}; \mathbf{b^\nu_{ij}} = \left.\frac{\Delta \mathbf{f_i}}{\Delta \nu_j}\right|_{\substack{\mathbf{x^*},\\ \mathbf{u^*}}}; \mathbf{c_{ij}} = \left.\frac{\Delta \mathbf{g_i}}{\Delta \mathbf{u_j}}\right|_{\substack{\mathbf{x^*},\\ \mathbf{u^*}}}; \mathbf{d^u_{ij}} = \left.\frac{\Delta \mathbf{g_i}}{\Delta \mathbf{u_j}}\right|_{\substack{\mathbf{x^*}\\ \mathbf{u^*}}}; \mathbf{d^\nu_{ij}} = \left.\frac{\Delta \mathbf{g_i}}{\Delta \nu_j}\right|_{\substack{\mathbf{x^*},\\ \mathbf{u^*}}},$$

где $\mathbf{\Delta f}$ – приращение функции, а $\mathbf{\Delta x}$ – приращение аргумента на опорной траектории, обозначаемой с индексом $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$. Выбор опорной траектории производится из предположения изменения состояния объекта по данной траектории. Размерность получаемой линеаризованной модели равняется числу используемых интеграторов в схеме моделирования. Выходными параметрами процедуры линеаризации является четверка матриц **A**, **B**, **C**, **D** линеаризованной модели.

Методы редукции или упрощения модели. Линеаризованную модель можно упростить методами, основанными на понижении порядка модели – сбалансированной реализацией и минимальной реализацией [6]. Первый метод связан с исключением элементов модели с относительно большими по модулю полюсами, которые определяются через матричное преобразование, приводящее граммианы управляемости и наблюдаемости к диагональной форме. Диагонали преобразованных граммианов (матриц) содержат элементы, определяющие степень управляемости и наблюдаемости отдельных мод. Исключение относительно малых элементов этих диагональных матриц эквивалентно понижению порядка модели.

Метод минимальной реализации исключает неуправляемые или ненаблюдаемые переменные состояния путем сокращения близких по значениям нулей и полюсов. Результирующая модель имеет минимальный порядок и такие же частотные характеристики, как исходная линейная модель.

На основе данных методов и соответствующих процедур системы MatLab структурный синтез НМ можно проводить в интерактивном режиме, исключая при проектировании громоздкие аналитические процедуры и осуществляя необходимый анализ моделей.

3. Параметрический синтез НМ на основе её достижимости. Дадим определение достижимости НМ, как свойство существования ограниченного вектора дополнительного управления $\mathbf{\Delta u(t)}$ для обеспечения требуемого уровня близости выходов исходной и номинальной моделей.

Определение 1. Редуцированная линейная НМ (6) называется достижимой для различных неопределенностей объекта, если для ограниченного вектора эквивалентного возмущения $\mathbf{v(t)\in L_2}$, некоторого номинального вектора параметров $\mathbf{\Theta_н\in\Omega_\Theta}$ и заданного уровня согласованности $\mathbf{\Delta_y}$ моделей существует ограниченный вектор управления $\mathbf{u_н(t)+\Delta u(t)\in L_2}$, такой, что выполняется неравенство $\left\| \mathbf{y_0(t) - y_н(t)} \right\|_{\mathbf{L_2}} < \mathbf{\Delta_y}$.

Выполнение свойства достижимости связано со способом формирования вектора $\mathbf{\Delta u(t)}$ по НМ или схемой включения такой модели в контуре управления. Очевидно, различные схемы включения НМ определяют различные свойства вектора $\mathbf{\Delta u(t)}$. Свойство достижимости может обеспечить близость выходов для некоторой НМ, поэтому из множества достижимых НМ необходимо выбрать оптимальную для обеспечения максимальной области робастности или наиболее широких вариаций возможных возмущений при сохранении показателей качества наблюдения или управления.

С этой целью сформулируем понятие оптимально достижимой НМ.

Определение 2. Номинальную модель, определяемую вектором параметров $\Theta_н^* \in \Omega_\Theta$, назовем оптимально достижимой на множестве возможных значений параметров $\Theta(t)\in\Omega_\Theta$, если для ограниченных векторов эквивалентного возмущения $v(t)\in L_2$ и управления $u_н(t)+\Delta u(t)\in\Omega_u$ выполняется условие достижимости по выходу и параметры НМ являются оптимальными по критерию интегральных энергетических затрат вектора $\Delta u(t)$:

$$\Theta_н^* = \arg\min_{\Theta_н\in\Omega_\Theta} \int_{\Omega_\Theta} \left\|\Delta u(t,\Theta,\Theta_н)\right\|_{L_2} d\Theta. \tag{8}$$

На основе критерия (8) можно разработать вычислительные процедуры определения параметров НМ, которые определяют единственную модель при множественности исходных параметров.

Условия существования достижимой модели определяем следующим утверждением для «квадратных систем», которое приведем без доказательства. Предварительно обозначим: $W_e^u(s) = C^н\left(sI - A^н + LC\right)^{-1}\left(B_u^н - LD_u^н\right) + D_u^н$ – матричная передаточная (ПФ) наблюдателя по управлению, $W_н^u(s) = C^н\left(sI - A^н\right)^{-1}B_u^н + D_u^н$ – матричная ПФ номинальной модели по управлению, $W_н^u(s) = C^0\left(sI - A^0\right)^{-1}B_u^0 + D_u^0$ – матричная ПФ линейной модели объекта по управлению.

Утверждение 1 (критерий достижимости по выходу линейной НМ). Линейная номинальная модель, определяемая вектором параметров $\Theta_н\in\Omega_\Theta$, будет полностью достижимой по выходу для всех видов неопределенностей объекта и возможных значений параметров $\Theta\in\Omega_\Theta$, если выполняются условия: а)вектор эквивалентного возмущения является ограниченным $v(t)\in L_2$; б) матрица $\mathbf{A - LC}$ - гурвицева; в) $\dim\left(W_e^u(s)\right) = n_y \times n_u$, $n_u=n_y$ и вектор дополнительного управления определяется оператором КМ вида $W_к(s) = \left(W_e^u(s)\right)^{-1}$, а $W_e^u(s)$ - обратимый оператор; г) существует согласованность управления и возмущения; д) $\left\|\left(W_н^u(s)\right)^{-1}\Delta W_0^u(s,\Theta)\right\|_{H_\infty} = q < 1$ на всем множестве значений параметров $\Theta\in\Omega_\Theta$.

4. Примеры синтеза достижимой НМ. Рассмотрим применение описанных способов в задаче синтеза упрощенных моделей самолета в короткопериодическом и изолированном движении по крену. Используем программную модель пространственного движения самолета с нелинейными аэродинамическими характеристиками как исходную модель в задаче синтеза. Линеаризуем модель вычислительным способом и получим модель со следующими полюсами:

$$\boldsymbol{\lambda_1=0.0;\ \lambda_1=-0.0098;\ \lambda_3=-0.4560;\ \lambda_4=-1.4682;\ \lambda_5=-2.7700;}$$
$$\boldsymbol{\lambda_{5,6}=-2.5635\pm 6.7732i;\ \lambda_{7,8}=-0.0065\pm 0.0702i}.$$

При декомпозиции на продольное и боковое движения получим передаточные функции - угол тангажа / руль высоты и угол крена / элерон:

$$\mathbf{W_{\delta_b}^{\vartheta}(s)=\frac{-4.6014(s+0.01941)(s+0.4939)}{(s+1.468)(s+2.77)(s\hat{}\ 2+0.01293s+0.004972)}};$$

$$\mathbf{W_{\delta_b}^{\vartheta}(s)=\frac{-1.564s\left(s^2+5.09s+52.04\right)}{s(s+0.456)(s+0.009836)\left(s^2+5.127s+52.45\right)}}.$$

Применяя далее метод минимальных реализаций, получаем ПФ:

$$\mathbf{W_{\delta_b}^{\vartheta}(s)=\frac{-4.6014(s+0.01941)(s+0.4939)}{(s+1.468)\left(s^2+0.01293s+0.004972\right)}};$$

$$\mathbf{W_{\delta_b}^{\vartheta}(s)=\frac{-1.564}{(s+0.456)(s+0.009836)}}.$$

Для ПФ продольного движения упрощение не произошло ввиду существенного различия нулей и полюсов, а для кренового движения порядок уменьшился за счет сокращения близких значений нулей и полюсов.

Проверим условие достижимости НМ для полюса $\boldsymbol{\lambda_2=-1.468}$ из диапазона $[-0.14;-2.78]$ ПФ - угол тангажа/руль высоты. Оценка нормы условия достижимости (д) при различных значениях полюса дана в табл. 1.

Таблица 1

Оценка нормы условия достижимости

Полюс объекта	-0.14	-0.58	-1.02	-1.46	-1.90	-2.34	-2.78
Норма **q**	2.43	0.81	0.3	0	0.22	0.4	0.5

Величина параметра **q** при различных значениях полюса объекта из заданного диапазона указывает на существование достижимой НМ не для всего диапазона возможных значений полюса объекта. Нарушение условия достижимости происходит для меньшего значения варьируемого полюса. Для формирования НМ из всего множества возможных параметров движения необходимо получить набор НМ (интервальные НМ), а далее по критерию достижимости сформировать оптимальную НМ.

Рассмотрим задачу синтеза номинальной модели для объекта типа электрогидравлический привод (ЭГП), структурная схема которого приведена на рис.1. Составными элементами ЭГП являются электронный усилитель, электромеханический преобразователь, гидроусилитель и нагрузка. Передаточные функции (ПФ) неизменных элементов можно представить в виде:

$$W_{ус}(s)=\frac{K_{ус}}{T_{ус}s+1};\quad W_{эм}(s)=\frac{K_{эм}}{T_{эм}s+1};\quad W_{гу}(s)=\frac{K_{гу}}{s\left(T_{гу}{}^{2}s^{2}+2T_{гу}\xi_{гу}+1\right)}.$$

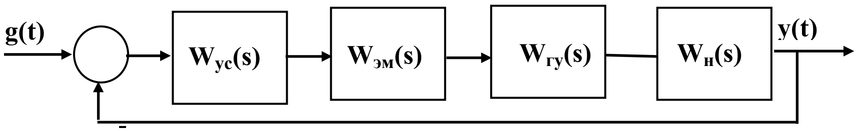

Рис. 1. Структурная схема ЭГП

Изменяемая часть ЭГП в виде передаточной функции нагрузки $W_{н}(s)$ содержит инерционную, шарнирную нагрузки и трение со смазочным материалом. Учитывая, что при изменении на траектории полета самолета скоростного напора наиболее существенно будет меняться жесткость шарнирного момента, упрощенно ПФ разомкнутого контура с нагрузкой запишем [7]:

$$W_{пр}(s)=\frac{K_{пр}}{\left(T_{ш}s+1\right)\left(T_{эм}s+1\right)\left(T_{гу}{}^{2}s^{2}+2T_{гу}x_{гу}+1\right)\left(T_{ус}s+1\right)}.$$

Для ЭГП с коэффициентами $T_{ус}$ = **0.005** с; $T_{гу}$ = **0.004** с; $\xi_{гу}$ = **0.2**; $T_{эм}$ = **0.08** с и $T_{ш}$ = **0.014** с (момент инерции руля **J = 0.01** Н·м·с^2; $K_{ш}$ = **50** Н·м) передаточную функцию замкнутого привода запишем

$$\Phi(s)=\frac{1}{9.05\cdot10^{-11}s^{5}+3.02\cdot10^{-8}s^{4}+8.52\cdot10^{-6}s^{3}+1.7\cdot10^{-3}s^{2}+0.1s+1}.$$

Упростим полученную модель с помощью функции сбалансированной реализации пакета MATLAB и получим вектор **g**, содержащий диагональные элементы результирующего граммиана

$$g=[0.6603\quad 0.1718\quad 0.0439\quad 0.0355\quad 0.0031].$$

Поскольку вектор **g** характеризует степень управляемости и наблюдаемости мод сбалансированной модели, то можно пренебречь значениями трех последних мод из-за малости значений. При этом сохраняются наиболее важные динамические свойства первоначальной системы. Удаляем соответствующие моды для понижения порядка системы при выполнении условия сохранения значения коэффициента передачи. Тогда упрощенная номинальная модель ЭГП примет вид

$$\Phi(s)=\frac{1417}{s^{2}+62.41s+1417}.$$

Для проверки условия достижимости номинальной модели для всего диапазона изменения шарнирного момента $K_{ш}$ от 0.1 Н·м до 100 Н·м вычислим норму произведения обратной номинальной модели и разности между реальным объектом W_0 и номинальной моделью W_{mod} (табл. 2):

$$q=\left\|\left(W_{mod}\right)^{-1}\cdot\left(W_0-W_{mod}\right)\right\|_{H_2}.$$

Таблица 2

Зависимость коэффициента достижимости номинальной модели от $\mathbf{K_ш}$

$\mathbf{K_ш}$, Н м	0.1	5	10	25	50	75	100
Норма **q**	0.733	0.244	0.165	0.141	0.113	0.21	0.232

Анализ полученных данных свидетельствует о том, что номинальная модель привода выбрана корректно, и удовлетворяет условию достижимости для всего диапазона изменения шарнирного момента.

Заключение. Изложенные методы и предложенные критерии позволяют эффективно решать задачи выбора НМ с применением современных инструментальных средств НМ. Методы сбалансированной и минимальной реализаций позволяют формировать модели минимальной структурной сложности. Получаемые вычислительным способом относительно простые модели могут учитывать такие особенности, которые при аналитическом способе выявить затруднительно. Свойство достижимости позволяет выбрать такую НМ, которая обеспечивает максимальные робастные свойства систем управления с номинальными моделями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Б.Н. Избранные труды. Теория автоматического управления. Т.1.– М.: Наука, 1983.*
2. *Громыко В.Д., Санковский Е.А. Самонастраивающиеся системы с эталонной моделью. – М.: Энергия, 1974.*
3. *Кунцевич В.М. О редуцированных моделях дискретных динамических объектов и их гарантированных оценках в задачах управления // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 1.– С. 42 - 50.*
4. *Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985.*
5. *Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985.*
6. *Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов. - М.: ДИАЛОГ – МИФИ,-1999.*
7. *Крымов Б.Г., Рабинович Л.В., Стеблецов В.Г. Исполнительные устройства систем управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1987. – 264 с.*

Поступила 22.02.2002

КОРТУНОВ Вячеслав Иванович*, канд. техн. наук, докторант кафедры Систем управления летательными аппаратами. В 1977 году окончил ХАИ. Область научных интересов – системы управления в условиях неопределенности.*

ПЕТРЕНКО Василий Иванович*, зам. начальника отдела НТ СКБ «ПОЛИСВИТ». В 1971 году окончил ХАИ. Область научных интересов – системы управления сложными объектами.*

ДЫБСКАЯ Ирина Юрьевна*, аспирантка кафедры Систем управления летательными аппаратами. В 1987 году окончила ХАИ. Область научных интересов – синтез управления*

исполнительными механизмами и системами в условиях неопределенности.