УДК 681.142.36

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА МИНИМИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАВИСИМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

к.т.н. Н.Г. Коробков, Е.Н. Коробкова
(представил д.т.н., проф. В.Я. Жихарев)

Рассмотрен алгоритм минимизации обобщенных логических функций, множество значений которых равно нулю, единице и зависимым параметрам, основанный на разбиении множества значений на пересекающиеся подмножества, содержащие по два значения с общим элементом пересечения, равным нулю.

Способы задания рассматриваемого класса функций по сути не отличаются от соответствующих способов задания функций с постоянными параметрами, поскольку здесь, как и в случае функций с постоянными параметрами, задать логическую функцию означает указать однозначное соответствие между наборами переменных и значением функции на этих наборах. Отличие будет состоять лишь в том, что в точках определения обобщенной функции будут находиться некоторые функции от вторичных переменных – $\mathbf{F_i}(\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \ldots)$.

В наиболее общем случае обобщенная функция может только на отдельных наборах принимать значение $\mathbf{F_i}$, на других она может, как и раньше, равняться единице, нулю, постоянным параметрам, а также иметь недоопределенные значения, при этом характер функций $\mathbf{F_i}$ на некоторых наборах может совпадать. В отдельных случаях могут иметь место функции, принимающие на всех наборах значения $\mathbf{F_i}$ или любые сочетания $\mathbf{F_i}$ с другими перечисленными значениями.

Наиболее наглядное представление дает отображение обобщенных функций в картах Карно. На рис. 1 представлена обобщенная функция наиболее общего вида от четырех первичных переменных.

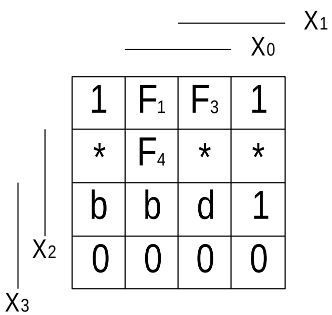

Рис.1. Обобщенная функция от четырех переменных

Функция равна единице на 0, 2 и 14 наборах; равна нулю на 8, 9, 10 и 11 наборах; равна некоторым функциям от вторичных переменных на 1 ($\mathbf{F_1}$), 3 ($\mathbf{F_3}$), 5 ($\mathbf{F_5}$) наборах; равна постоянному параметру **b** на 12 и 13 наборах; равна постоянному параметру **d** на 15 наборе; функция недоопределена на 4, 6 и 7 наборах.

Если каждую из функций $\mathbf{F_i}$ трактовать также как параметр (аналогичный $\mathbf{b,d}$), то алгоритм минимизации функций [1], соответствующих этим параметрам, позволяющий представить минимальную форму составляющих в виде суммы простых импликант с последующим умножением на параметр для рассматриваемого класса функций не подходит в силу того, что сами параметры, в этом случае, представляют собой функции от новых (вторичных) переменных и раздельная минимизация составляющих с последующим умножением на минимальную форму каждой из $\mathbf{F_i}$ не гарантирует минимальной формы результата.

В принципе возможно в качестве параметров взять сами вторичные переменные, но и здесь возникают определенные затруднения в нахождении минимальной формы, связанные с необходимостью покрытия их в различных функциональных сочетаниях.

Поскольку каждую из функций ($\mathbf{F_i}$) можно представить в виде логической суммы минтермов от вторичных переменных, на которых она принимает единичное значение, то предлагается в качестве параметров, определяющих значения функций $\mathbf{F_i}$ на заданных наборах первичных переменных, выбрать эти минтермы и тогда в точках определения обобщенной функции, в которых она принимает значение, равное $\mathbf{F_i}$ (в соответствующих элементах карты, в случае представления обобщенной функции в карте), будут представлены логические суммы минтермов, определяющие эти функции и задачи минимизации, как и выше, сводится к оптимальному покрытию параметров этих минтермов простыми импликантами первичных переменных, правда, с учетом известных соотношений между минтермами вторичных переменных.

Если число вторичных переменных равно $\mathbf{m}$, то число минтермов, а следовательно число параметров, будет равно $\mathbf{2^m}$. Рассмотрим сначала обобщенные функции с зависимыми параметрами, являющимися функциями от одной переменной $\mathbf{a}$. В соответствии с приведенным соотношением число этих параметров будет равно двум, один из которых равен нулевому минтерму от этой переменной – $\mathbf{m_0 = \bar{a}}$, а второй – единичному минтерму – $\mathbf{m_1 = a}$. И тогда, если задана обобщенная логическая функция общего вида, принимающая значения нуля, единицы, зависимых параметров $\mathbf{m_0}$, $\mathbf{m_1}$, а также независимых параметров, и имеющая недоопределенные значения, то множество этих значений предлагается, как и выше, разбить на пересекающиеся подмножества, содержащие по два значения, с общим элементом равным нулю, выделив, как и раньше, в отдельное подмножество недоопределенные значения.

Сформулированные выше утверждения лежат в основе алгоритма минимизации, однако, следует отметить одно весьма существенное отличие. Сформулируем и докажем утверждение, определяющее это отличие.

Утверждение 1. *Если обобщенная логическая функция с параметрами, зависящими от одной переменной на некоторых наборах равна* $\mathbf{m_0}$*, а на дру-*

гих – $\mathbf{m_1}$*, и если при этом один или несколько единичных наборов доопределяются значениями обоих параметров, то такие единичные наборы могут быть исключены из их массива.*

Доказательство этого утверждения следует из того, что единицу, соответствующую любому из наборов, можно представить как логическую сумму любой переменной и его отрицания, следовательно, и значений $\mathbf{a}$ и $\mathbf{\bar{a}}$:

$$\mathbf{1} = \mathbf{a} \vee \mathbf{\bar{a}} = \mathbf{m_1} \vee \mathbf{m_0}, \qquad (1)$$

что и позволяет полностью поглотить ее двумя соседними наборами, на одном из которых функция равна параметру $\mathbf{m_1}$, а на другом – $\mathbf{m_0}$.

Исключение единичного набора, поглощенного параметрами $\mathbf{m_0}$ и $\mathbf{m_1}$ целесообразно только в том случае, если при таком исключении уменьшается число простых импликант, покрывающих множество единичных наборов, и не увеличивается ранг простых импликант.

К этому же классу можно отнести функции, параметры которых зависят от нескольких переменных, но все эти параметры распадаются на независимые группы, каждая из которых является функцией от одной (своей) переменной. Поскольку группы таких параметров независимы одна от другой, то сформулированное положение можно применять к каждой из них, независимо от других. Такие функции будем называть функциями с независимыми группами параметров.

Рассмотрим функцию, множество значений которой состоит из трех подмножеств, значениями одного из которых является нуль и единица, значениями второго - нуль и $\mathbf{a}$, значениями третьего – нуль и $\mathbf{\bar{a}}$. В плоскости карты представлена некоторая функция такого типа (рис. 2).

X_1 X_0 X_2 X_3

1	$\bar{a}$	0	0
1	$\bar{a}$	0	0
a	a	1	1
a	0	$\bar{a}$	0

Рис. 2. Карта Карно функции примера

Выполняя доопределение единиц на 0 и 4 наборах значением параметра **a**, получаем правильную конфигурацию, которой соответствует простая импликанта $\mathbf{x_1 x_0 a}$. Доопределяя единицы на 0 и 4 наборах значением параметра $\mathbf{\bar{a}}$, получаем правильную конфигурацию, которой соответствует простая импликанта $\mathbf{\bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{a}}$, покрывающая параметр $\mathbf{\bar{a}}$ на 1 и 5 наборах. В результате доопределения 0 и 4 наборов значениями параметров $\mathbf{a}$ и $\mathbf{\bar{a}}$, эти два единичных набора оказались поглощенными и их можно исключить из массива. Доопределяя единицы на 14 и 15 наборах значением параметра **a**, получаем правильную конфигурацию, которой соответствует простая импликанта $\mathbf{x_3 x_2 a}$, покрывающая параметр $\mathbf{a}$ на 13 наборе. Доопределяя единицу на 15 наборе значением параметра $\mathbf{\bar{a}}$, получаем правильную конфигурацию, которой соответствует простая импликанта $\mathbf{x_3 x_1 x_0 \bar{a}}$, покрывающая параметр $\bar{a}$ на 11 наборе. Единица на 15 наборе поглощена значениями параметров a и $\bar{a}$, но исключить ее из массива единиц нельзя, поскольку при этом увеличился бы ранг простой импликанты, покрывающей единицу на 14 наборе. Поэтому эта единица остается в массиве и тогда она совместно с единицей на 15 наборе образует правильную конфигурацию, которой соответствует простая импликанта $x_3x_2x_1$, покрывающая эти единицы.

Суммируя полученные простые импликанты, записываем минимальную форму приведенной функции:

$$F_{min} = \bar{x}_1\bar{x}_0 a \vee \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{a} \vee x_3x_2a \vee x_3x_1x_0\bar{a} \vee x_3x_2x_1. \qquad (2)$$

Рассмотрим вторую разновидность функций, которую мы назвали функциями с независимыми группами параметров. В качестве примера рассмотрим функцию, множество значений которой состоит из пяти подмножеств, значениями одного из которых является нуль и единица, значениями второго и третьего подмножеств будут нуль и первая группа параметров, зависящих от переменной a, т.е. a и $\bar{a}$; значениями четвертого и пятого подмножеств будут нуль и вторая группа параметров, зависящих от переменной b, т.е. b и $\bar{b}$.

В соответствии с утверждением 3 параметр a можно было бы покрыть простой импликантой, соответствующей правильной конфигурации, состоящей из нулевого и первого элементов, нулевого и второго элемента, нулевого и восьмого элементов, доопределив соответствующие наборы значением a. Однако в соответствии с утверждением 1 предоставляется только один вариант доопределения, а именно значением параметра a доопределяется единица, соответствующая первому набору, в результате чего получаем правильную конфигурацию, состоящую из нулевого и первого элементов, которой соответствует простая импликанта $\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1a$. Доопределяя единицу на первом наборе значением $\bar{a}$, получаем правильную конфигурацию, состоящую из первого и пятого элементов, которой соответствует простая импликанта $\bar{x}_3\bar{x}_1x_0\bar{a}$. В результате проведенного доопределения произошло не только покрытие параметра a и $\bar{a}$, но и поглощение единицы на первом наборе. В плоскости карты (рис. 3) представлена некоторая функция такого типа.

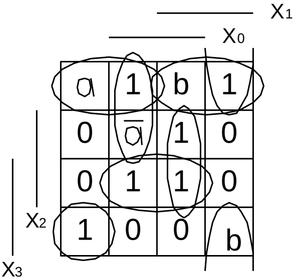

Рис. 3. Карта Карно после доопределения

Аналогичное доопределение можно выполнить по отношению к единице на втором наборе доопределяя ее значением b и $\bar{b}$, в результате чего получаем простые импликанты $x_3x_2x_1b$ и $\bar{x}_2x_1\bar{x}_0\bar{b}$, покрывающие соответственно параметр b и параметр $\bar{b}$, и поглощающие единицу на втором наборе. Оставшиеся единицы покрываются обычным образом, в результате чего получаем

$$\mathbf{F_{1\,min} = x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0}. \qquad (3)$$

Суммируя полученные значения простых импликант, записываем минимальную форму данной функции

$$\mathbf{F_{min} = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1a \vee \bar{x}_3\bar{x}_1x_0\bar{a} \vee \bar{x}_3\bar{x}_2x_1b \vee \bar{x}_2x_1\bar{x}_0\bar{b} \vee} \\ \mathbf{\vee x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0.} \qquad (4)$$

Следующим рассмотрим наиболее общий случай, когда число вторичных переменных больше одной. Рассмотрение начнем с функции от двух переменных – $\mathbf{a_1a_0}$, а затем рассмотрим алгоритм и на более общий случай произвольного их числа.

Если число вторичных переменных равно двум, то число минтермов от этих переменных, а следовательно, и число параметров будет равно четырем:

$$\mathbf{m_0 = \bar{a}_1\bar{a}_0}; \qquad (5)$$

$$\mathbf{m_1 = \bar{a}_1a_0}; \qquad (6)$$

$$\mathbf{m_2 = a_1\bar{a}_0}; \qquad (7)$$

$$\mathbf{m_3 = a_1a_2}. \qquad (8)$$

Число различных функций от двух переменных, как известно, равно шестнадцати (в это число входят и две вырожденные функции – константа нуль и константа единица). Следовательно, в каждой точке определенной обобщенной функции может быть любая из шестнадцати функций от вторичных переменных. Каждую из этих функций можно представить как сумму соответствующих минтермов и задача минимизации этих составляющих, как и раньше, сводится к оптимальному покрытию этих минтермов простыми импликантами первичных переменных. Однако при этом необходимо учитывать основные соотношения между этими минтермами, а именно:

$$\mathbf{m_0 \vee m_1 = \bar{a}_1}; \qquad (9)$$

$$\mathbf{m_0 \vee m_2 = \bar{a}_0}; \qquad (10)$$

$$\mathbf{m_1 \vee m_3 = a_0}; \qquad (11)$$

$$\mathbf{m_2 \vee m_3 = a_1}; \qquad (12)$$

$$\mathbf{m_0 \vee m_1 \vee m_2 = (m_0 \vee m_1) \vee (m_0 \vee m_2) = \bar{a}_1 \vee \bar{a}_0}; \qquad (13)$$

$$\mathbf{m_0 \vee m_2 \vee m_3 = (m_0 \vee m_2) \vee (m_2 \vee m_3) = \bar{a}_0 \vee a_1}; \qquad (14)$$

$$\mathbf{m_1 \vee m_2 \vee m_3 = (m_1 \vee m_3) \vee (m_2 \vee m_3) = a_0 \vee a_1}; \qquad (15)$$

$$\mathbf{m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 = 1}. \qquad (16)$$

Эти соотношения позволяют осуществлять покрытие одной простой импликантой (там где это возможно) сразу двух минтермов, которым соответствует та или другая переменная в прямом или инверсном виде. И только в случае если некоторая функция

$$\mathbf{F_i = m_0 \vee m_3} \qquad (17)$$

или

$$\mathbf{F_i = m_1 \vee m_2},\qquad(18)$$

необходимо осуществить покрытие каждой из составляющих в отдельности.

Следующая особенность алгоритма минимизации рассматриваемого класса функций связана с доопределением единичных наборов значениями параметров. Сформулируем и докажем утверждение, определяющее эту особенность.

Утверждение 2. *Если обобщенная логическая функция с параметрами, зависящими от двух переменных, задана на некоторых наборах различными сочетаниями параметров (минтермов) и если при этом один или несколько единичных наборов доопределяется всеми (четырьмя) параметрами, то такие единичные наборы могут быть исключены из их массива.*

Доказательство этого утверждения следует из соотношения

$$\mathbf{1 = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3}.\qquad(19)$$

Это позволяет полностью поглотить ее соседними наборами, соотношения минтермов на которых дает логическую сумму, равную этим некоторым минтермам.

Как и выше, исключение единичного набора, поглощенного параметрами $\mathbf{m_0, m_1, m_2, m_3}$ целесообразно только в том случае, если при таком исключении уменьшается число простых импликант, покрывающих множество единичных наборов, и не увеличивается ранг простых импликант.

Аналогично, как и выше, к этому же классу можно отнести функции, параметры которых зависят от большего числа переменных, но все эти параметры распадаются на независимые группы и каждая из этих групп является функцией от двух переменных.

Заключение. Предложен алгоритм минимизации обобщенных логических функций, заданных не только значениями нуля и единицы, но и некоторыми параметрами, которые в свою очередь являются функциями от других переменных. Проведен анализ предложенного алгоритма минимизации функций, параметры которых являются функциями от одной и двух переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробков Н.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма минимизации обобщенных логических функций с независимыми параметрами // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 1 (17). – С. 13 - 16.*

Поступила 19.03.2002

***КОРОБКОВ Николай Григорьевич**, к.т.н. доцент кафедры НАКУ «ХАИ». В 1963 году окончил ХАИ. Область научных интересов – системы и средства обработки информации.*

***КОРОБКОВА Елена Николаевна**, старший преподаватель Белгородской ГАСМ. В 1990 году окончила ХАИ. Область научных интересов – системы и средства обработки информации.*