УДК 681.142.36

ГРАФО - АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ОБОБЩЁННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

д.т.н., проф. В.Г. Рубанов, Е.Н. Коробкова
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

Рассмотрен алгоритм нахождения минимальных дизъюнктивных нормальных форм обобщённых логических функций с зависимыми параметрами, основанный на выделении правильных конфигураций массива единиц, нулей и параметров, определяющих функции, представленные в картах Карно.

Согласно [1] обобщенные логические функции (ОЛФ) с зависимыми параметрами, это такие функции, которые на некоторых наборах переменных множества **X** принимают значения, являющиеся функциями от переменных множества **A**. Переменные множества **X** назовём первичными переменными, а переменные множества **A** – вторичными. Если число первичных переменных не более шести, а число вторичных переменных не более трёх, то наиболее удобным методом нахождения минимальных ДНФ будет метод, основанный на использовании карт Карно.

Для представления ОЛФ в карте Карно необходимо в каждую ее клетку записать значение функции, которому оно соответствует на данном наборе первичных переменных $\mathbf{x_i, x_{i-1}, \ldots, x_1}$.. В случае классических булевых функций ими были ноль и единица. В случае ОЛФ это могут быть те же самые значения, но кроме них могут быть любые функции от вторичных переменных – $\mathbf{F(a_1, a_2, \ldots, a_k)}$. Разумеется, что рассматриваемые функции можно свести к классическим, для чего достаточно развернуть эти функции на всех наборах, рассматривая их как функции от суммарного числа переменных $\mathbf{F(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_1, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)}$ с последующим представлением этих функций в картах полученной размерности. Поскольку размерность карты в этом случае возрастет в $2^{\mathbf{k}}$ раз, то целесообразность этого пути неоправданна.

Суть предлагаемого метода нахождения минимальных ДНФ рассматриваемого класса функций состоит в представлении каждой из функций от вторичных переменных $\mathbf{F(a_1, a_2, \ldots, a_k)}$ в СДНФ, т.е. в виде логической суммы минтермов, определяемых этими переменными, записав их в соответствующие клетки карты, определяемые первичными переменными. Для нахождения минимальной ДНФ необходимо покрыть множество всех единиц и минтермов минимально возможным числом произведений минимально возможного ранга [2].

Ранг произведения (число переменных), соответствующего правильной конфигурации, образованной массивом единиц, определяется числом первичных переменных **(i)** и площадью правильной конфигурации (числом клеток в ней - **Z**):

$$\mathbf{R = i - \log_2 Z\ .} \tag{1}$$

Ранг произведения, соответствующего правильной конфигурации, образованной массивом одинаковых параметров, определяется как:

$$\mathbf{R' = R + R_P\ ,} \tag{2}$$

где $\mathbf{R_P}$ – число вторичных переменных, определяющих параметр $\mathbf{R_P \leq K}$.

В соответствии с правилом идемпотентности функция от вторичных переменных, представленная в одной или нескольких клетках карты или любая составная часть её (до отдельного минтерма) может одновременно входить в несколько правильных конфигураций.

Проведём анализ зависимости (2) от характера и числа минтермов, представленных в клетках карты.

Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда параметрами ОЛФ будут невырожденные функции от одной вторичной переменной. Число невырожденных функций от одной переменной равно двум, одна из которых равна нулевому минтерму, а вторая единичному:

$$\mathbf{F_0(a) = \bar{a} = m_0;\quad F_1(a) = a = m_1\ .}$$

Задача нахождения минимальной ДНФ сводится к визуальному выделению правильных конфигураций, оптимальным образом покрывающих массив единиц и массивы минтермов $\mathbf{m_0}$ и $\mathbf{m_1}$.

Отдельной клетке, в которой представлен минтерм $\mathbf{m_0}$ или $\mathbf{m_1}$, соответствует произведение (**i** + 1)-го ранга, равное логической координате этой клетки, умноженной на минтерм; двум соседним клеткам, с одноименными минтермами, соответствует произведение **i**-го ранга, равное логической координате этой конфигурации, умноженной на соответствующий минтерм; четырём соседним клеткам, с одноименными минтермами, соответствует произведение (**i** – 1) - го ранга; и т.д. в соответствии с (1, 2).

При определении массива соседних клеток с одноименными минтермами в их число можно включать клетки с единичными значениями [2]. Это следует из того, что любой набор первичных переменных, на котором функция равна единице, т. е. не зависит от вторичной переменной, можно рассматривать как виртуально зависимый от неё, поскольку единицу на этом наборе можно представить как логическую сумму единицы и любого минтерма: $\mathbf{1 = 1 \vee m_0}$; $\mathbf{1 = 1 \vee m_1}$.

Если при таком включении наборов, на которых функция равна единице, окажется, что один или несколько из них будут включены как в массив (конфигурацию) клеток со значением $\mathbf{m_0}$, а также в конфигурацию клеток $\mathbf{m_1}$, то такие наборы с единичным значением могут быть исключены из их массива [1]. Это следует из того, что значение единицы на любом из наборов первичных переменных можно представить как логическую сумму минтермов: $\mathbf{1 = a \vee \bar{a} = m_1 \vee m_0}$, что и даёт возможность её поглощения двумя соседними наборами, на одном из которых функция равна $\mathbf{m_1}$, а на втором – $\mathbf{m_0}$. При этом следует иметь в виду, что из массива единичных клеток, поглощённых минтермами $\mathbf{m_0}$ и $\mathbf{m_1}$, исключаются только те, удаление которых не увеличивает число правильных конфигураций, образуемых единичными клетками, не поглощёнными минтермами, а также ранг произведений, соответствующий этим конфигурациям.

В качестве примера, иллюстрирующего предложенный алгоритм, рассмотрим некоторую функцию от одной вторичной переменной и четырех первичных переменных, заданную значениями $\mathbf{\{0, 1, m_0, m_1\}}$ на соответствующих наборах первичных переменных: **0 –** {4, 5, 6, 8, 10, 15}**;** **1 –** {1, 2, 3, 12}**;** $\mathbf{m_0}$ **–** {7, 9, 11, 14}**;** $\mathbf{m_1}$ **–** {0, 13}**.**

Представим эти значения в соответствующих клетках карты Карно, приведённой на рис.1.

x_2 x_1

m_1 0	**1** 1	**1** 3	**1** 2
0 4	**0** 5	m_0 7	**0** 6
1 12	m_1 13	**0** 15	m_0 14
0 8	m_0 9	m_0 11	**0** 10

x_3 x_4

Рис.1 ОЛФ от четырёх первичных и одной вторичной переменных

x_2 x_1

m_1	m_0 m_1	m_0 m_1	**1** m_1
0	**0**	m_0	**0**
m_0 m_1	m_1	**0**	m_0
0	m_0	m_0	**0**

x_3 x_4

Рис.2 ОЛФ с доопределением параметров единичными наборами

Анализируя распределение массива единиц и минтермов в поле карты, нетрудно заметить, что если единицы на первом, третьем и двенадцатом наборах представить в виде логической суммы $\mathbf{m_0 \vee m_1}$, а на втором - в виде логической суммы – $\mathbf{1 \vee m_0}$ (на рис. 2 для простоты знак логической суммы в клетках карты опущен), то такое представление позволяет выделить правильные конфигурации минтермов $\mathbf{m_0}$ и $\mathbf{m_1}$ максимально возможной площади, которым соответствует минимально возможный ранг произведений:

- правильной конфигурации массива минтермов $\mathbf{m_1}$, образованной клетками карты 0, 1, 2, 3, соответствует произведение $\mathbf{a\,\bar{x}_4\bar{x}_3}$;

- правильной конфигурации массива минтермов $\mathbf{m_0}$, образованной клетками 3, 7, соответствует произведение $\mathbf{\bar{a}\,\bar{x}_4\,x_2x_1}$;
- правильной конфигурации массива минтермов, образованной клетками 1, 3, 9, 11, соответствует произведение $\mathbf{\bar{a}\,\bar{x}_3\,x_1}$;
- правильной конфигурации массива минтермов $\mathbf{m_0}$, образованной клетками 12, 14, соответствует произведение $\mathbf{\bar{a}\,x_4x_3\,\bar{x}_1}$;
- правильной конфигурации массива минтермов $\mathbf{m_1}$, образованной клетками 12, 13 соответствует произведение $\mathbf{ax_4x_3\,\bar{x}_2}$.

Единицы на первом, третьем и двенадцатом наборах оказались поглощенными минтермами $\mathbf{m_0}$, $\mathbf{m_1}$ и их можно было бы исключить из дальнейшего рассмотрения. Однако, в силу того, что единица на втором наборе не поглощена, то для её оптимального покрытия единицу на третьем наборе из массива единиц исключать нецелесообразно, т. к. при её исключении единице на втором наборе будет соответствовать произведение четвертого ранга, а правильной конфигурации, образованной вторым и третьим наборами, соответствует произведение третьего ранга $\mathbf{\bar{x}_4\bar{x}_3x_2}$.

Выполняя логическое суммирование полученных произведений, записываем минимальную ДНФ заданной функции:

$$\mathbf{F(x_4,x_3,x_2,x_1,a) = a\,\bar{x}_4\bar{x}_3 \vee ax_4x_3\,\bar{x}_2 \vee \bar{a}\,\bar{x}_4\,x_2x_1 \vee \bar{a}\,\bar{x}_3\,x_1 \vee \bar{a}\,x_4x_3\,\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4\,\bar{x}_3\,x_2}. \quad (3)$$

В общем случае, когда число вторичных переменных больше одной, быстро растет число минтермов, определяемых этими переменными, и соответственно, число различных функций. Если число вторичных переменных равно двум – $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, число минтермов, определяемых этими переменными, будет равно четырём – $\mathbf{m_0 = \bar{a}_2\bar{a}_1}$, $\mathbf{m_1 = \bar{a}_2\,a_1}$, $\mathbf{m_2 = a_2\,\bar{a}_1}$ и $\mathbf{m_3 = a_2a_1}$, а число различных невырожденных функций равно четырнадцати. Следовательно, в точках определения обобщенной логической функции могут быть не только константы ноль и единица, но и любые из четырнадцати функций от переменных $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, представленных в виде логической суммы минтермов.

Отдельной клетке карты, в которой представлен один из четырех минтермов, соответствует произведение ($\mathbf{i}$ + 2) - го ранга, равное логической координате этой клетки, умноженной на минтерм. Отдельной клетке, в которой представлена логическая сумма двух минтермов $\mathbf{m_\alpha \vee m_\beta}$ и при этом $\boldsymbol{\alpha + \beta = 3}$, соответствует логическая сумма двух произведений ($\mathbf{i}$ + 2) - го ранга, одно из которых равно логической координате клетки, умноженной на минтерм $\mathbf{m_\alpha}$, а второе – логической координате клетки, умноженной на минтерм $\mathbf{m_\beta}$. Отдельной клетке, в которой представлена логическая сумма двух минтермов $\mathbf{m_p \vee m_q}$, и если при этом $\mathbf{p + q \neq 3}$, соответствует произведение ($\mathbf{i}$ + 1) - го ранга. Уменьшение ранга на единицу обусловлено тем, что логическая сумма $\mathbf{m_p \vee m_q}$, при $\mathbf{p + q \neq 3}$ может быть упрощена до произведения первого ранга, поскольку минтермы $\mathbf{m_p}$ и $\mathbf{m_q}$, будут соседними по одной из переменных, при этом:

$$\mathbf{m_0 \vee m_1 = \bar{a}_2\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 a_1 = \bar{a}_2}\,; \tag{4}$$

$$\mathbf{m_0 \vee m_2 = \bar{a}_2\bar{a}_1 \vee a_2\bar{a}_1 = \bar{a}_1}\,; \tag{5}$$

$$\mathbf{m_1 \vee m_3 = \bar{a}_2 a_1 \vee a_2 a_1 = a_1}\,; \tag{6}$$

$$\mathbf{m_2 \vee m_3 = a_2\bar{a}_1 \vee a_2 a_1 = a_2}\,. \tag{7}$$

Отдельной клетке, в которой представлена логическая сумма любых трёх минтермов $\mathbf{m_\alpha \vee m_\beta \vee m_\gamma}$, соответствует сумма двух произведений ($\mathbf{i}$ + 1) - го ранга. Это обусловлено тем, что логическую сумму любых трех минтермов, определяемых вторичными переменными $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_1}$, всегда можно свести к логической сумме двух переменных, каждая из которых может быть с отрицанием или без него:

$$\mathbf{m_0 \vee m_1 \vee m_2 = \bar{a}_2 \vee \bar{a}_1}\,; \tag{8}$$

$$\mathbf{m_0 \vee m_1 \vee m_3 = \bar{a}_2 \vee a_1}; \tag{9}$$

$$\mathbf{m_0 \vee m_2 \vee m_3 = a_2 \vee \bar{a}_1}\,; \tag{10}$$

$$\mathbf{m_1 \vee m_2 \vee m_3 = a_2 \vee a_1}. \tag{11}$$

Поскольку при увеличении площади правильной конфигурации массива одноименных минтермов в два раза ранг произведения уменьшается на единицу, то очевидны следующие утверждения:

- двум соседним клеткам, в которых представлен один и тот же минтерм, соответствует произведение ($\mathbf{i}$ + 1) - го ранга;
- двум соседним клеткам, в которых представлена логическая сумма двух минтермов $\mathbf{m_\alpha \vee m_\beta}$ (при $\boldsymbol{\alpha + \beta = 3}$) соответствует логическая сумма двух произведений ($\mathbf{i}$ – 1) - ранга;
- двум соседним клеткам, в которых представлена логическая сумма двух минтермов $\mathbf{m_p \vee m_q}$ (при $\mathbf{p + q \neq 3}$) соответствует произведение $\mathbf{i}$ - го ранга;
- двум соседним клеткам, в которых представлена логическая сумма любых трёх минтермов $\mathbf{m_\alpha \vee m_\beta \vee m_\gamma}$ соответствует логическая сумма двух произведений $\mathbf{i}$ - го ранга.

Аналогичным образом можно определить ранг произведений, соответствующих правильным конфигурациям, образованным четырьмя, восемью и т.д. клетками с одноименными минтермами или логическими суммами одинаковых минтермов.

При определении геометрии правильных конфигураций массива одноименных минтермов или логических сумм с одинаковыми минтермами, точно также, как и в случае одной вторичной переменной, в их число можно включить клетки с единицами. Если при этом окажется, что некоторые клетки с единичными значениями будут одновременно включены в правильные конфигурации массива $\mathbf{m_0}$, $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ и $\mathbf{m_3}$, то такие клетки с единичным значением могут быть исключены из массива единиц. При этом, как и в случае одной вторичной переменной, из массива клеток с единичными значениями могут быть исключены только те клетки, поглощённые минтермами $\mathbf{m_0}$, $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, $\mathbf{m_3}$, удаление которых не ведет к увеличению ранга произведений и их числа, соответствующих оставшимся единичным клеткам.

Анализ предложенного метода нахождения минимальной ДНФ этого класса функций проведем на примере некоторой ОЛФ от четырех первичных – $\mathbf{x_4}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_1}$ и двух вторичных – $\mathbf{(a_2, a_1)}$ переменных, представленной в карте Карно (рис. 3). Каждый из параметров – $\mathbf{F(a_2, a_1)}$ в клетках карты представлен в СДНФ, т.е. логической суммой минтермов (на рисунке знак логической суммы опущен).

Методически операцию оптимального покрытия множества единиц и минтермов рекомендуется начинать с массива минтермов (с возможным доопределением их единичными значениями), причем, вначале с таких, оптимальное покрытие которых единственно возможно. Затем покрываются минтермы, допускающие различные варианты покрытия, а в самом конце покрываются массивы единиц с возможным удалением поглощённых.

x_2
x_1

1	m_0 m_3	**1**	m_0 m_2 m_3
0	m_2 m_3	**1**	**0**
m_1 m_2 m_3	**1**	**1**	m_1 m_3
0	m_2	m_0 m_1 m_2	m_2

x_3
x_4

Рис. 3. ОЛФ, параметры которой зависят от двух переменных

В нашем примере можно начать с клетки 1, где представлена логическая сумма $\mathbf{m_0 \vee m_3}$.

Правильной конфигурацией максимально возможной площади для минтерма $\mathbf{m_0}$, представленного в первой клетке, будет конфигурация доопределённая единичными наборами, состоящая из четырёх клеток: 0, 1, 2, 3. Этой конфигурации соответствует произведение $\mathbf{m_0\,\bar{x}_4\bar{x}_3}$. Поскольку минтерм $\mathbf{m_3}$, представленный в первой клетке, можно включить в правильную конфигурацию двумя равноценными способами (клетки 0, 1, 2, 3 и 1, 3, 5, 7), то рекомендуется выбор того или другого варианта рассматривать после того, как будут выполнены все покрытия для единственно возможных вариантов. То же самое можно сказать и о второй клетке, где остались непокрытыми минтермы $\mathbf{m_2 \vee m_3}$, к покрытию которых мы также перейдем на втором этапе покрытий.

В клетке 5 представлена логическая сумма $\mathbf{m_3 \vee m_2 = a_2}$. Правильной конфигурацией максимально возможной площади для этой суммы будет конфигурация, состоящая из клеток 5, 7, 13, 15, которой соответствует произведение $(m_2 \vee m_3)\ x_3x_1$ (это произведение можно записать более короче – $a_2x_3x_1$, но методически рекомендуется сначала записывать в первоначальном виде, чтобы избежать пропуска покрытий некоторых минтермов, и только после выполнения всех покрытий перейти к коротким записям).

В клетке 12 представлена логическая сумма $m_1 \vee m_2 \vee m_3$, покрытие которой можно представить в виде логической суммы двух произведений, одно из которых соответствует правильной конфигурации, состоящей из четырех клеток: 12, 13 ,14, 15 с минтермами $m_1 \vee m_3$, а второе соответствует правильной конфигурации, состоящей из двух клеток: 12, 13 с минтермами $m_2 \vee m_3$. Первой конфигурации соответствует произведение $(m_1 \vee m_3)\ x_4x_3$, а второй – $(m_2 \vee m_3)\ x_4x_3\,\bar{x}_2$.

В клетке 9 представлен минтерм m_2. Правильной конфигурацией максимально возможной площади для этого минтерма будет конфигурация, состоящая из четырёх клеток: 9, 11, 13, 15, которой соответствует произведение $m_2x_4x_1$.

В клетке 10 представлен минтерм m_2. Правильной конфигурацией максимально возможной площади для него будет конфигурация, состоящая из четырех клеток: 10,11,2,3, которой соответствует произведение $m_2\,\bar{x}_3\,x_2$.

В клетке 11 остались непокрытыми минтермы $m_0 \vee m_1$. Правильной конфигурацией максимально возможной площади для них будет конфигурация, состоящая из четырёх клеток: 1, 7, 11, 15, которой соответствует произведение $(m_0 \vee m_1)\ x_2x_1$.

Остался непокрытым минтерм m_3 в клетках 1 и 2, опущенных на первом этапе покрытий. Теперь видно, что единственным вариантом для их покрытия будет правильная конфигурация, состоящая из клеток: 0, 1, 2, 3, которой соответствует произведение $m_3\,\bar{x}_4\,\bar{x}_3$.

После покрытия всех минтермов производится анализ массива единиц, причём сначала производится анализ на предмет возможности исключения некоторых из них, включённых одновременно в конфигурации всех четырёх минтермов (если такие имеются).

Нулевая клетка с единичным значением включена в массив клеток только со значениями m_0 и m_3, следовательно, исключить её невозможно. Этой клетке соответствует произведение $\bar{x}_4\,\bar{x}_3\,\bar{x}_2\,\bar{x}_1$.

Клетки 3, 7, 15 вошли в массивы всех четырёх минтермов и их можно было бы все исключить, однако исключению подлежат только клетки 3, 7, поскольку клетка 15 дополняет клетку 13, подлежащую покрытию, до правильной конфигурации, состоящей из двух клеток, которой соответствует произведение $x_4\,x_3\,x_1$.

Объединяя найденные произведения знаком логической суммы и заменяя минтермы или их суммы значениями, выраженными через вторичные переменные, получаем минимальную ДНФ, заданной обобщенной логической функцией от шести переменных:

$$\mathbf{F}(x_4,x_3,x_2,x_1,a_2,a_1) = \bar{a}_2\,\bar{a}_1\,\bar{x}_4\,\bar{x}_3 \vee a_2x_3x_1 \vee a_1a_4a_3 \vee a_2x_4x_3\bar{x}_2 \vee$$

$$\vee\, a_2\bar{a}_1\,\bar{x}_3\,x_2 \vee a_2x_2x_1 \vee a_2a_1\bar{x}_4\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4\,\bar{x}_3\,\bar{x}_2\,\bar{x}_1 \vee x_4x_3x_1 \vee a_2\,\bar{a}_1\,x_4x_1\,. \quad (12)$$

Проведенный анализ алгоритма выделения правильных конфигураций может показаться трудоёмким. Действительно, на первых порах приходится как-то отмечать минтермы и единицы, включённые в те или другие конфигурации в процессе покрытия, во избежание упустить какой - либо из них. Но по мере накопления опыта, оценка вариантов происходит в уме и сразу записываются произведения, оптимальным образом покрывающие множество минтермов и единиц.

Аналогичным образом можно находить и минимальную ДНФ функции от большего числа как первичных, а также вторичных переменных, однако при этом трудоёмкость возрастает из-за неспособности человека визуально оценить все возможные варианты покрытий и выбрать оптимальный.

При большом числе переменных целесообразна программная реализация алгоритма, позволяющая сократить число переборов по сравнению с известными алгоритмами.

Заключение. Предложен алгоритм нахождения минимальных ДНФ, обобщённых логических функций с зависимыми параметрами, основанный на представлении логических функций в картах Карно. Сформулированы правила выбора оптимального покрытия параметров. Проведен анализ предложенного алгоритма на примерах нахождения минимальной ДНФ заданных функций, подтвердивший его эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробков Н.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма минимизации обобщенных логических функций с зависимыми параметрами // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2(18). – С. 225 - 230.*
2. *Коробков Н.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма минимизации обобщенных логических функций с независимыми параметрами // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 1(17). – С. 13 - 16.*

Поступила 3.04.2002

РУБАНОВ Василий Григорьевич, *Заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Белгородской ГАСМ. В 1965 году окончил ХАИ. Область научных интересов – системы автоматического управления и регулирования, контроль и диагностика автоматических систем.*

КОРОБКОВА Елена Николаевна, *старший преподаватель Белгородской ГАСМ. В 1990 году окончила ХАИ. Область научных интересов – системы и средства обработки информации.*