

## АНАЛИЗ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ, ТРЕБУЕМОГО ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ЛОКАЦИОННЫХ ДАННЫХ С ЗАДАНЫМ СРЕДНИМ РИСКОМ

к.т.н. В.Е. Саваневич, А.В. Пугач  
(представил д.т.н., проф. Д.В. Голкин)

*В статье изложена методика определения общей и частных средних взаимных информаций между состояниями и решениями, минимально необходимых для стабилизации среднего риска классификации на заданном уровне. Подчеркивается необходимость обеспечения в  $\varepsilon$  - энтропии пропорций между частными информациями, определенными в экстремальном распределении.*

Необходимость разработки локационных систем с заданным качеством принимаемых решений при наименьших затратах делает актуальной задачу синтеза статистических алгоритмов минимальной сложности [1]. Для обеспечения заданного среднего риска  $\mathbf{R}^*$  необходимо [1], чтобы средняя взаимная информация (СВИ) между пространствами состояний  $\mathbf{X}$  и решений  $\mathbf{U}$  была не меньше  $\varepsilon(\mathbf{R}^*)$  - энтропии  $\mathbf{I}_{\mathbf{XU}}^*$  [2]. Естественно, количество информации в выборке также не должно быть меньше  $\mathbf{I}_{\mathbf{XU}}^*$ .

Решению задачи определения  $\mathbf{R}^*$  - энтропии при классификации локационной информации посвящена данная работа.

Итак, имеют место  $(\mathbf{M} + 1)$  возможных вариантов (состояний) целевой обстановки ( $\mathbf{M}$  вариантов траекторий и их отсутствие, отметка получена от одной из  $\mathbf{M}$  целей или является ложной и т.д.), составляющих пространство состояний (ПС)  $\mathbf{X}$ . Каждому состоянию  $\mathbf{x}$  с номером  $\mathbf{i}$  соответствует априорная вероятность  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) > 0$ . Кроме того, имеет место пространство решений (ПР)  $\mathbf{U}$ , включающее в себя  $(\mathbf{M} + 1)$  возможных решений  $\mathbf{u}$ , в совокупности, по сути своей, повторяющих ПС.

В виде матрицы  $(\mathbf{M} + 1) \times (\mathbf{M} + 1)$  задана функция потерь с элементами  $\mathbf{P}_{ij}$ , характеризующими потери, возникающие при принятии решения  $\mathbf{u}_j$  в состоянии  $\mathbf{x}_i$ .

Необходимо найти экстремальные совместные вероятности состояний и решений  $\mathbf{P}_{\mathbf{xu}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_j)$ , обеспечивающие минимум СВИ между ПС и ПР



где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} e^{-\beta\Pi_{00}} & \dots & e^{-\beta\Pi_{0M}} \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{-\beta\Pi_{0M}} & \dots & e^{-\beta\Pi_{MM}} \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_M)$ ;  $\bar{\mathbf{1}}$  - вектор-столбец, все элементы которого равны 1.  
Тем самым

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{1}} = \sum_{j=0}^M b_{xu}(x_i, u_j),$$

где  $b_{xu}(x_i, u_j)$  - элементы матрицы  $\mathbf{B}^{-1}$ .

Далее используя понятие термодинамического потенциала  $\Gamma = -\mathbf{H}_X - \sum_{i=0}^M P_X(x_i) \ln Q_i$  в соответствии с известными тождествами  $d\Gamma/d\beta = -\mathbf{R}$ ;  $\beta d\Gamma/d\beta - \Gamma = \mathbf{I}$  можно вывести выражения для среднего риска и  $\epsilon$ -энтропии как функций от неопределенного множителя  $\beta$  [4]:

$$\mathbf{R}(\beta) = \sum_{i=0}^M P_X(x_i) \frac{\sum_{j=0}^M a_{xu}(x_i, u_j)}{\sum_{j=0}^M b_{xu}(x_i, u_j)}; \quad (9)$$

$$\mathbf{I}(\beta) = \mathbf{H}_X - \sum_{i=0}^M P_X(x_i) \left[ \frac{\beta \sum_{j=0}^M a_{xu}(x_i, u_j)}{\sum_{j=0}^M b_{xu}(x_i, u_j)} - \ln \left( \sum_{j=0}^M b_{xu}(x_i, u_j) \right) \right], \quad (10)$$

где  $\mathbf{H}_X = -\sum_{i=0}^M P_X(x_i) \log P_X(x_i)$  - энтропия пространства состояний;

$$a_{xu}(x_i, u_j) = \frac{\partial b_{xu}(x_i, u_j)}{\partial \beta}.$$

При вычислении производной обратной матрицы достаточно использовать легко доказуемое тождество

$$\frac{d}{dx} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \left( \frac{d}{dx} \mathbf{B} \right) \mathbf{B}^{-1}. \quad (11)$$

Для нахождения  $\beta$  следует использовать выражение (9) в виде уравнения  $\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}^*$ .

Таким образом, найдя элементы матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  и  $\frac{d\mathbf{B}^{-1}}{d\beta}$ , а затем и

множитель  $\beta$ , можно найти  $\varepsilon$ -энтропию  $I_{XU}^*$  классификатора локационной-ной информации в соответствии с выражением (10).

При решении задачи обнаружения ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{1}$ ) выражения для элементов матриц  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\frac{d\mathbf{B}^{-1}}{d\beta}$  существенно упрощаются:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{D}} \begin{pmatrix} \exp(-\beta\Pi_{11}) & -\exp(-\beta\Pi_{10}) \\ -\exp(-\beta\Pi_{01}) & \exp(-\beta\Pi_{00}) \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$$\frac{d\mathbf{B}^{-1}}{d\beta} = \frac{1}{\mathbf{D}^2} \begin{pmatrix} -(\Pi_{11}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{11}) & (\Pi_{10}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{10}) \\ (\Pi_{01}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{01}) & -(\Pi_{00}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{00}) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{D} = \exp(-\beta(\Pi_{00} + \Pi_{11})) - \exp(-\beta(\Pi_{01} + \Pi_{10}))$ ;

$$\mathbf{C} = (\Pi_{01} + \Pi_{10})\exp(-\beta(\Pi_{01} + \Pi_{10})) - (\Pi_{00} + \Pi_{11})\exp(-\beta(\Pi_{00} + \Pi_{11})).$$

Выражение для среднего риска обнаружителя принимает вид

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathbf{D}} \left[ \mathbf{q} \frac{((\Pi_{01}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{01}) - (\Pi_{11}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{11}))}{(\exp(-\beta\Pi_{11}) - \exp(-\beta\Pi_{01}))} + \right. \\ \left. + \mathbf{p} \frac{((\Pi_{10}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{10}) - (\Pi_{00}\mathbf{D} + \mathbf{C})\exp(-\beta\Pi_{00}))}{\mathbf{D}(\exp(-\beta\Pi_{00}) - \exp(-\beta\Pi_{10}))} \right], \quad (14)$$

где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$  - априорные вероятности наличия и отсутствия объекта.

Общий вид зависимости среднего риска обнаружителя от минимально необходимой средней взаимной информации ((9), (10))  $I_{XU}^*$  приведен на рис.1.

Кривые соответствуют вероятности наличия цели 0.5 и отличаются матрицами потерь: в первом случае платы за ошибочные решения равны

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ во втором же}$$

плата за пропуск цели выше, чем за ложную тревогу -

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Видно, что с ростом СВИ до максимального}$$

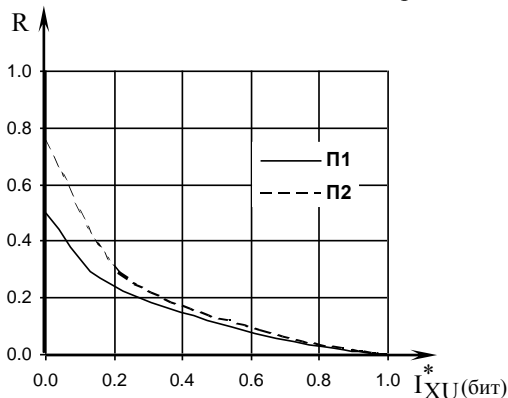


Рис.1. Зависимость среднего риска от средней информации между состояниями и наблюдениями

значения (соответствует энтропии ПС) средний риск уменьшается до нуля.

Обеспечение общей СВИ между ПС и ПР на уровне  $I_{XU}^*$  является необходимым, но никак не достаточным условием стабилизации среднего риска на уровне  $R^*$ . Дополнительно необходимо соблюдение качественного состава СВИ, определенного в экстремальном распределении. При этом недостаток хотя бы по одной из частных СВИ приводит к большему, чем требуется, риску  $R$  даже, иногда, при существенном избытке общей информации  $I_{XU}$  (рис. 2). Кроме того, для обеспечения одного и того же среднего риска может быть «израсходовано» существенно различное количество информации. На рис. 3 приведены кривые, все точки которых соответствуют  $R^* = 0.25$  при четырех различных функциях потерь:

$$\Pi 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi 2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Pi 3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi 4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что при неблагоприятных ситуациях количество СВИ, необходимое для стабилизации среднего риска на уровне  $R^*$ , может более чем вдвое превышать минимально необходимое.

Итак, для нахождения экстремальных вероятностей необходимо из определения  $Q_i$  (7) найти непосредственные значения множителей

$$\gamma_i = \ln P_x(x_i) - \ln(Q_i). \quad (15)$$

Далее безусловные вероятности принятия решений определяются из системы линейных уравнений типа (6):

$$B^T P_u = E_\gamma \Rightarrow P_u = (B^T)^{-1} E_\gamma, \quad (16)$$

где  $P_u$  - вектор-столбец безусловных вероятностей решений;  $E_\gamma = (e^{\gamma_0}, \dots, e^{\gamma_M})$ .

Затем совместные вероятности состояний и решений определяются вы-

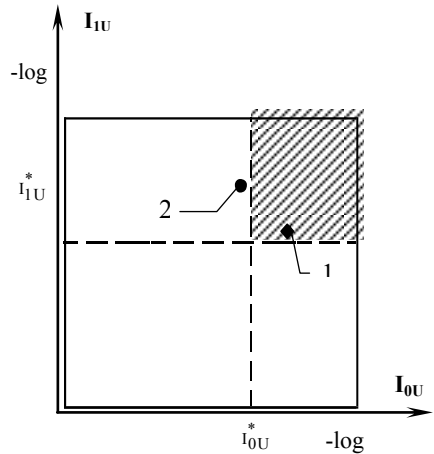


Рис. 2. Отображение  $\epsilon$ -энтропии и вариантов формирования выборок в плоскости частных средних информаций

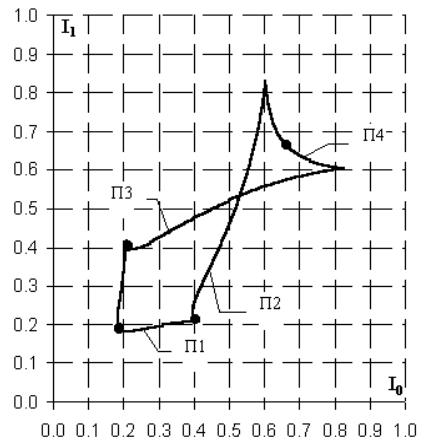


Рис. 3. Взаимные зависимости частных средних информаций, обеспечивающих средний риск 0.25, для обнаружителей с различными матрицами потерь (точки на кривых соответствуют минимально необходимой СВИ  $I_{XU}^*$ )

ражением (4). В соответствии с определением условной вероятности события вероятности принятия решения  $u_j$  при состоянии  $x_i$  имеют вид

$$P_{u/x}(u_j/x_i) = P_{xu}(x_i, u_j)/P_x(x_i). \quad (17)$$

В свою очередь, искомые частные  $\varepsilon$ -энтропии находятся по определению

$$I_{xU} = \sum_{j=0}^M P_{u/x}(u_j/x_i) \log \frac{P_{u/x}(u_j/x_i)}{P_u(u_j)}. \quad (18)$$

Для обнаружителя качество обнаружения часто задают условными вероятностями правильного обнаружения (УВПО)  $D^*$  и ложной тревоги (УВЛТ)  $F^*$ . При этом необходимые частные средние взаимные информации в соответствии с определением (1) находятся наиболее просто:

$$I_{0U}^* = (1 - F^*) \log \frac{1 - F^*}{q(1 - F^*) + p(1 - D^*)} + F^* \log \frac{F^*}{qF^* + pD^*}; \quad (19)$$

$$I_{1U}^* = (1 - D^*) \log \frac{1 - D^*}{q(1 - F^*) + p(1 - D^*)} + D^* \log \frac{D^*}{qF^* + pD^*}.$$

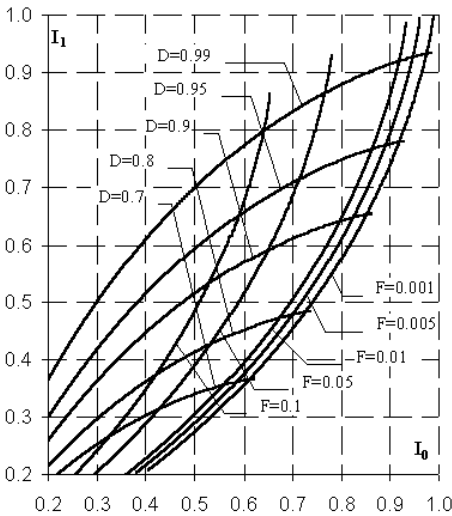


Рис.4. Линии «уровней» УВПО и УВЛТ в плоскости частных средних информаций

Максимальное возможное значение частных СВИ в данном случае может быть получено из выражений (19) путем предельного перехода  $D^* \rightarrow 1$ ,  $F^* \rightarrow 0$  и составляет  $I_{0U} = -\log q$ ,  $I_{1U} = -\log p$ . В общем же случае связь между УВПО и УВЛТ, с одной стороны, и средним количеством информации о наличии и отсутствии цели, с другой, имеет вид, приведенный на рис. 4.

Тем самым, для обеспечения заданных УВПО  $D^*$  и УВЛТ  $F^*$  при заданной условной вероятности наличия цели  $p$ , необходимо, чтобы выборка в плоскости  $I_{0U} : I_{1U}$ , по крайней мере, попала в правый верхний квадрант относительно точки характеризующей  $\varepsilon$ -

энтропию (рис. 2). Например, проверяется простая гипотеза о наличии цели против простой альтернативы об ее отсутствии по бинарным сигналам. При этом  $p = 0.5$ ,  $D = 0.9$ ,  $F = 0.1$ ,  $D^* = 0.89$ ,  $F^* = 0.05$ . Задано два варианта последовательного правила обнаружения объекта, которые схематически при-

ведены на рис. 5.

Их средние частные информации о состоянии в виде точек 1 и 2 представлены на рис. 2. Видно, что вторая последовательность однозначно не удовлетворяет требованиям по качеству принимаемых решений. Вместе с тем, оба варианта имеют одинаковую среднюю информацию между пространствами состояний и наблюдений, составляющую 0.684.

Итак, для нахождения минимально необходимой (для обеспечения среднего риска  $R^*$ ) средней взаимной информации между пространствами состояний и решений  $I_{XU}^*$  в качественном составе, определенном частными  $R^*$ -энтропиями  $I_{XU}^*$  необходимо выполнить следующую

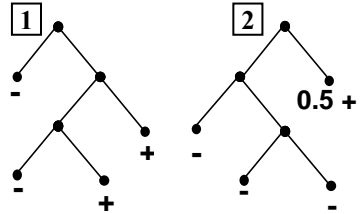


Рис. 5. Варианты последовательных правил обнаружителя

последовательность операций: в соответствии с выражениями (8), (11)

определить элементы матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  и  $\frac{d\mathbf{B}^{-1}}{d\beta}$ ; найти неопределенный

множитель  $\beta$ , исходя из заданного среднего риска  $R^*$  в соответствии с выражением (9) и множители  $\gamma_x$ , используя выражение (15); затем рассчитать экстремальные значения условных и безусловных вероятностей принятия решений (16), (4), (17), после чего, используя выражения (1), (10), (18), необходимо определить общую и частные  $\varepsilon$ -энтропии.

В свою очередь, при выборе пространства наблюдений для классификации анализа общего количества информации содержащегося в выборке явно недостаточно. Имеет место необходимость контроля всего вектора частных информаций на предмет достижения его элементами значений, определенных экстремальным распределением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саваневич В.Е. Информационный подход к синтезу статистических алгоритмов с минимальной сложностью // Системы обработки информации. – Х. : НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вып. 3(9). – С. 123 - 128.
2. Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. Курс теории информации. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
4. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М.: Сов. радио, 1975. – 424 с.

Поступила 8.04.2002

**Саваневич Вадим Евгеньевич**, канд. техн. наук, доцент, докторант ХВУ. В 1986 году окончил ХВУРЭ. Область научных интересов – обработка локационной информации,

информметрия.

**Пугач Андрей Витальевич**, адъюнкт Харьковского военного университета. В 1997 году окончил ХВУ. Область научных интересов – обработка локационной информации.

---