

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОШИБОК ПЕРЕДАЧИ В КАНАЛЕ С ПАМЯТЬЮ

к.т.н. Л.А. Клименко, Д.В. Сумцов
(представил проф. А.В. Королёв)

Приведена математическая модель возникновения ошибок передачи в канале с памятью на основе модели Беннета - Фройлиха с нормальным распределением длин пакетов ошибок.

Исследования статистических характеристик потоков ошибок в реальных каналах показали, что ошибки являются зависимыми и обладают тенденциями к группированию – образованию пакетов ошибок [1 - 5]. Это обусловлено наличием памяти канала. Для каналов с памятью разработан ряд моделей, имеющих различную сложность и адекватность.

Первой моделью, учитывающей память канала, была модель Гилберта. Существует большое число модификаций этой модели, такие как модели Эллиота - Гилберта, Маккуло, Смита - Боуэна - Джойса, Бахарь, Кохена - Берковица, Петровича, Фричмана - Свободы, Мюллера, Амосова - Колпакова, Бергера - Мандельброта, Брусиловского, Аксенова - Воронина, Дувакина и др. Однако все перечисленные модели предполагают геометрическое распределение длин пакетов ошибок [1, 2].

Более точной является модель канала, предложенная Беннетом и Фройлихом [1, 2]. Данная модель предполагает, что моменты возникновения пакетов ошибок независимы и интервалы между началами пакетов распределены по геометрическому закону

$$P(\Lambda) = P_n (1 - P_n)^\Lambda,$$

где Λ – интервал между началами i -го и $(i+1)$ -го пакетов ошибок; P_n – вероятность возникновения пакета ошибок.

Длина каждого пакета ошибок равна L_n с вероятностью $P(L_n)$ и также не зависит от длины других пакетов. Внутри пакета ошибки равновероятны и независимы, вне пакетов ошибки отсутствуют. Вероятность ошибки внутри пакета равна P_ε . Таким образом, для описания канала необходимо задать три параметра модели:

- вероятность возникновения пакета ошибок P_n ;
- вероятность ошибки внутри пакета равна P_ε ;
- функцию распределения длин пакетов $F(L_n)$.

К достоинствам модели Беннета - Фройлиха следует отнести относительно невысокую вычислительную сложность, небольшое число па-

раметров, большую по сравнению с моделью Гилберта точность, а также возможность произвольного выбора характера распределения длин пакетов ошибок. Одна из модификаций модели Беннета - Фройлиха, предполагающая гипергеометрическое распределение длин пакетов ошибок, была предложена в [2].

Однако в [3] показано, что длины пакетов ошибок в большинстве реальных каналов распределены по нормальному закону. В данной работе приведена усовершенствованная модель Беннета-Фройлиха с нормальным распределением длин пакетов ошибок. Таким образом, вместо функции распределения длин пакетов $F(I_n)$ достаточно задать математическое ожидание m_{I_n} и среднеквадратическое отклонение σ_{I_n} длин пакетов ошибок.

Длина интервала между началами соседних пакетов ошибок Λ есть дискретная случайная величина (ДСВ). Построим ряд распределения ДСВ и найдем функцию распределения ДСВ Λ [6]. Ряд распределения ДСВ Λ приведен в табл. 1.

Таблица 1

Ряд распределения случайной величины Λ

Λ	0	1	2	...	i	...
$P\{\Lambda = \lambda\}$	P_n	$P_n(1 - P_n)$	$P_n(1 - P_n)^2$...	$P_n(1 - P_n)^i$...

Функция распределения ДСВ Λ равна

$$F_{\Lambda}(\lambda) = P\{\Lambda < \lambda\} = \sum_{i=0}^{\lambda-1} P(\lambda) = P_n \left(1 + (1 - P_n) + (1 - P_n)^2 + \dots + (1 - P_n)^{\lambda-1} \right) =$$

$$= P_n \cdot \frac{1 - (1 - P_n)^{\lambda}}{1 - (1 - P_n)} = P_n \cdot \frac{1 - (1 - P_n)^{\lambda}}{P_n} = 1 - (1 - P_n)^{\lambda}.$$

Длина пакета ошибок L_n также является случайной величиной (СВ). Она распределена по нормальному закону распределения с параметрами m_{L_n} и σ_{L_n} , и в общем случае может принимать значения от 0 до ∞ .

Введем в рассмотрение случайную величину A , равную разности СВ Λ и L_n , т.е. $A = \Lambda - L_n$. СВ A может принимать значения от 0 до ∞ . Случайная величина A – это длина i -го безошибочного интервала (рис. 1). Вероятность правильной передачи пакета данных длиной n бит может быть определена как вероятность случайного события, состоящего в том, что случайная величина A примет значение большее или равное n :

$$P_{npn} = P\{A \geq n\} = 1 - P\{A < n\} = 1 - F_A(n), \quad (1)$$

где $F_A(n)$ – функция распределения СВ A от аргумента n .

Случайное событие B , состоящее в том, что СВ A примет значение, меньшее n , можно представить в виде суммы несовместных событий:

- B_0 – случайное событие, состоящее в том, что $\Lambda < n$ и $0 \leq L_n < 1$;
 B_1 – случайное событие, состоящее в том, что $\Lambda < n+1$ и $1 \leq L_n < 2$;
 B_2 – случайное событие, состоящее в том, что $\Lambda < n+2$ и $2 \leq L_n < 3$;
...
 B_i – случайное событие, состоящее в том, что $\Lambda < n+i$ и $i \leq L_n < i+1$;



Рис. 1. Пояснение смысла случайной величины Λ

Случайные величины Λ и L_n являются независимыми. Тогда вероятности данных событий равны:

$$P(B_0) = P\{(\Lambda < n) \cap (0 \leq L_n < 1)\} = P\{\Lambda < n\} \cdot P\{0 \leq L_n < 1\};$$

$$P(B_1) = P\{(\Lambda < n+1) \cap (1 \leq L_n < 2)\} = P\{\Lambda < n+1\} \cdot P\{1 \leq L_n < 2\};$$

$$P(B_2) = P\{(\Lambda < n+2) \cap (2 \leq L_n < 3)\} = P\{\Lambda < n+2\} \cdot P\{2 \leq L_n < 3\};$$

$$\dots$$

$$P(B_i) = P\{(\Lambda < n+i) \cap (i \leq L_n < i+1)\} = P\{\Lambda < n+i\} \cdot P\{i \leq L_n < i+1\}.$$

Так как события $B_0, B_1, B_2, \dots, B_i, \dots$ несовместны, то

$$P\{\Lambda < n\} = P(B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(B_i) = \sum_{i=0}^{\infty} [P\{\Lambda < n+i\} \cdot P\{i \leq L_n < i+1\}]. \quad (2)$$

Вероятность $P\{\Lambda < n+i\}$ есть не что иное, как функция распределения СВ Λ от аргумента $n+i$:

$$P\{\Lambda < n+i\} = F_{\Lambda}(n+i) = 1 - (1 - P_n)^{n+i}. \quad (3)$$

Для того, чтобы найти вероятность того, что значение СВ L_n , распределённой по нормальному закону с параметрами m_{l_n} и σ_{l_n} , попадет в интервал $[i, i+1)$, воспользуемся известной формулой [6]:

$$P\{i \leq L_n < i+1\} = \Phi\left(\frac{i+1 - m_{l_n}}{\sigma_{l_n}}\right) - \Phi\left(\frac{i - m_{l_n}}{\sigma_{l_n}}\right), \quad (4)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа от аргумента x .

Подставив (3), (4) в (2), получим функцию распределения СВ Λ

$$F_A(n) = P\{A < n\} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - (1 - P_n)^{n+i} \right] \cdot \left[\Phi \left(\frac{i+1 - m_{L_n}}{\sigma_{L_n}} \right) - \Phi \left(\frac{i - m_{L_n}}{\sigma_{L_n}} \right) \right]. \quad (5)$$

Тогда формула для вычисления вероятности правильной передачи пакета данных длиной n бит (1) примет вид

$$\begin{aligned} P_{npn} &= 1 - F_A(n) = \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - (1 - P_n)^{n+i} \right] \cdot \left[\Phi \left(\frac{i+1 - m_{L_n}}{\sigma_{L_n}} \right) - \Phi \left(\frac{i - m_{L_n}}{\sigma_{L_n}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

При использовании для обнаружения ошибок циклического кода с производящим полиномом степени r событие, состоящее в обнаружении ошибки на приёмной стороне, можно понимать как событие, состоящее в том, что СВ длины безошибочного интервала A примет значение, меньшее n , а СВ длины пакета ошибок L_n примет значение, меньшее $r+1$ или значение, большее либо равное $r+1$, с весовым коэффициентом $K = 1 - \frac{1}{2^r}$ [1]:

$$\begin{aligned} P_{oo} &= P\{A < n\} \cdot \left[P\{L_n < r+1\} + \left(1 - \frac{1}{2^r}\right) \cdot P\{L_n \geq r+1\} \right] = \\ &= F_A(n) \cdot \left\{ F_{L_n}(r+1) + \left(1 - \frac{1}{2^r}\right) \cdot [1 - F_{L_n}(r+1)] \right\} = \\ &= F_A(n) \cdot \left\{ F_{L_n}(r+1) + 1 - F_{L_n}(r+1) - \frac{1}{2^r} [1 - F_{L_n}(r+1)] \right\} = \\ &= F_A(n) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2^r} [1 - F_{L_n}(r+1)] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как СВ L_n распределена по нормальному закону, то её функция распределения имеет вид

$$F_{L_n}(x) = P\{L_n < x\} = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{x - m_{L_n}}{\sigma_{L_n}} \right). \quad (8)$$

Подставив (5), (8) в (7), получим вероятность обнаружения ошибки

$$P_{00} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \left[1 - (1 - P_n)^{n+i} \right] \cdot \left[\Phi \left(\frac{i+1 - m_{1n}}{\sigma_{1n}} \right) - \Phi \left(\frac{i - m_{1n}}{\sigma_{1n}} \right) \right] \right\} \times \left\{ 1 - \frac{1}{2^r} \cdot \left[\frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{r+1 - m_{1n}}{\sigma_{1n}} \right) \right] \right\}. \quad (9)$$

При использовании циклического кода с исправлением ошибок кратности t вероятность правильного приёма или исправления ошибки в данном случае есть вероятность случайного события, состоящего в том, что длина безошибочного A интервала примет значение, не превышающее $(n - t)$:

$$P_{\text{испр}n} = P\{A \geq n - t\} = 1 - P\{A < n - t\} = 1 - F_A(n - t) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \left[1 - (1 - P_n)^{n-t+i} \right] \cdot \left[\Phi \left(\frac{i+1 - m_{1n}}{\sigma_{1n}} \right) - \Phi \left(\frac{i - m_{1n}}{\sigma_{1n}} \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Приведенная модель позволяет с помощью выражений (6), (9), (10) рассчитать вероятностные характеристики систем передачи данных для каналов с памятью, распределение длин пакетов ошибок в которых близко к нормальному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронин А.А., Ростовцев Ю.Г., Цибрин В.Г. Основы построения систем передачи данных. – Л.: ВИКИ им. А.Ф. Можайского, 1978. – 419 с.
2. Блох Э.Л., Попов О.В., Турин О.В. Модели источника ошибок в каналах передачи цифровой информации. – М.: Связь, 1971. – 312 с.
3. Бакланов И. Г. Тестирование и диагностика систем связи. – М.: Эко-Трендз, 2001. – 264 с.
4. Элементы теории передачи дискретной информации / Л.П. Пуртов, А.С. Замрий, Захаров А.И., Охорозин А.И. – М.: Связь, 1972. – 232 с.
5. Мовсеян В.М., Мовсеян Р.М. Оценка статистических характеристик канала передачи цифровой информации // Радиоэлектроника. – 1991. – №1. – С. 37 - 41.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

Поступила 15.04.2002

КЛИМЕНКО Любовь Анатольевна, канд. техн. наук, преподаватель Харьковской ГАЖТ. В 1995 году окончила ХИИТ. Область научных интересов – передача и обработка информации.

СУМЦОВ Дмитрий Викторович, адъюнкт кафедры Харьковского военного университета. В 1995 году окончил Харьковский военный университет. Область научных

интересов – управление обменом данными в вычислительных сетях.
