УДК 681.391

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОШИБОК ПЕРЕДАЧИ В КАНАЛЕ С ПАМЯТЬЮ

к.т.н. Л.А. Клименко, Д.В. Сумцов
(представил проф. А.В. Королёв)

Приведена математическая модель возникновения ошибок передачи в канале с памятью на основе модели Беннета - Фройлиха с нормальным распределением длин пакетов ошибок.

Исследования статистических характеристик потоков ошибок в реальных каналах показали, что ошибки являются зависимыми и обладают тенденциями к группированию – образованию пакетов ошибок [1 - 5]. Это обусловлено наличием памяти канала. Для каналов с памятью разработан ряд моделей, имеющих различную сложность и адекватность.

Первой моделью, учитывающей память канала, была модель Гилберта. Существует большое число модификаций этой модели, такие как модели Эллиота - Гилберта, Маккуло, Смита - Боуэна - Джойса, Бахарь, Кохена - Берковица, Петровича, Фричмана - Свободы, Мюллера, Амосова - Колпакова, Бергера - Мандельброта, Брусиловского, Аксенова - Воронина, Дувакина и др. Однако все перечисленные модели предполагают геометрическое распределение длин пакетов ошибок [1, 2].

Более точной является модель канала, предложенная Беннетом и Фройлихом [1, 2]. Данная модель предполагает, что моменты возникновения пакетов ошибок независимы и интервалы между началами пакетов распределены по геометрическому закону

$$\mathbf{P(\Lambda) = P_п (1 - P_п)^{\lambda}},$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – интервал между началами $\mathbf{i}$-го и ($\mathbf{i}$+1)-го пакетов ошибок; $\mathbf{P_п}$ – вероятность возникновения пакета ошибок.

Длина каждого пакета ошибок равна $\mathbf{L_n}$ с вероятностью $\mathbf{P(L_n)}$ и также не зависит от длины других пакетов. Внутри пакета ошибки равновероятны и независимы, вне пакетов ошибки отсутствуют. Вероятность ошибки внутри пакета равна $\mathbf{P_\varepsilon}$. Таким образом, для описания канала необходимо задать три параметра модели:

– вероятность возникновения пакета ошибок $\mathbf{P_п}$;
– вероятность ошибки внутри пакета равна $\mathbf{P_\varepsilon}$;
– функцию распределения длин пакетов $\mathbf{F(\mathit{l}_n)}$.

К достоинствам модели Беннета - Фройлиха следует отнести относительно невысокую вычислительную сложность, небольшое число параметров, большую по сравнению с моделью Гилберта точность, а также возможность произвольного выбора характера распределения длин пакетов ошибок. Одна из модификаций модели Беннета - Фройлиха, предполагающая гипергеометрическое распределение длин пакетов ошибок, была предложена в [2].

Однако в [3] показано, что длины пакетов ошибок в большинстве реальных каналов распределены по нормальному закону. В данной работе приведена усовершенствованная модель Беннета-Фройлиха с нормальным распределением длин пакетов ошибок. Таким образом, вместо функции распределения длин пакетов $\mathbf{F}(\boldsymbol{l}_\mathbf{n})$ достаточно задать математическое ожидание $\mathbf{m}_{\boldsymbol{l}\mathbf{n}}$ и среднеквадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l}\mathbf{n}}$ длин пакетов ошибок.

Длина интервала между началами соседних пакетов ошибок $\boldsymbol{\Lambda}$ есть дискретная случайная величина (ДСВ). Построим ряд распределения ДСВ и найдем функцию распределения ДСВ $\boldsymbol{\Lambda}$ [6]. Ряд распределения ДСВ $\boldsymbol{\Lambda}$ приведен в табл. 1.

Таблица 1

Ряд распределения случайной величины $\boldsymbol{\Lambda}$

$\boldsymbol{\Lambda}$	0	1	2	…	$\mathbf{i}$	…
$\mathbf{P}\{\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda}\}$	$\mathbf{P_п}$	$\mathbf{P_п}(1 - \mathbf{P_п})$	$\mathbf{P_п}(1 - \mathbf{P_п})^2$	…	$\mathbf{P_п}(1 - \mathbf{P_п})^\mathbf{i}$	…

Функция распределения ДСВ $\boldsymbol{\Lambda}$ равна

$$\mathbf{F}_\Lambda(\lambda) = \mathbf{P}\{\Lambda < \lambda\} = \sum_{i=0}^{\lambda-1} \mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P_п}\left(1 + (1-\mathbf{P_п}) + (1-\mathbf{P_п})^2 + \ldots (1-\mathbf{P_п})^{\lambda-1}\right) =$$

$$= \mathbf{P_п} \cdot \frac{1-(1-\mathbf{P_п})^\lambda}{1-(1-\mathbf{P_п})} = \mathbf{P_п} \cdot \frac{1-(1-\mathbf{P_п})^\lambda}{\mathbf{P_п}} = 1-(1-\mathbf{P_п})^\lambda .$$

Длина пакета ошибок $\mathbf{L_n}$ также является случайной величиной (СВ). Она распределена по нормальному закону распределения с параметрами $\mathbf{m}_{\boldsymbol{l}\mathbf{n}}$ и $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l}\mathbf{n}}$, и в общем случае может принимать значения от 0 до ∞.

Введем в рассмотрение случайную величину $\mathbf{A}$, равную разности СВ $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{L_n}$, т.е. $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{L_n}$. СВ $\mathbf{A}$ может принимать значения от 0 до ∞. Случайная величина $\mathbf{A}$ – это длина $\mathbf{i}$ - го безошибочного интервала (рис. 1). Вероятность правильной передачи пакета данных длиной $\mathbf{n}$ бит может быть определена как вероятность случайного события, состоящего в том, что случайная величина $\mathbf{A}$ примет значение большее или равное $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{P_{пр\,п}} = \mathbf{P}\{\mathbf{A} \geq \mathbf{n}\} = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{A} < \mathbf{n}\} = 1 - \mathbf{F_A}(\mathbf{n}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{F_A}(\mathbf{n})$ – функция распределения СВ $\mathbf{A}$ от аргумента $\mathbf{n}$.

Случайное событие $\mathbf{B}$, состоящее в том, что СВ $\mathbf{A}$ примет значение, меньшее $\mathbf{n}$, можно представить в виде суммы несовместных событий:

$\mathbf{B_0}$ – случайное событие, состоящее в том, что $\mathbf{\Lambda} < \mathbf{n}$ и $0 \le \mathbf{L_n} < 1$;
$\mathbf{B_1}$ – случайное событие, состоящее в том, что $\mathbf{\Lambda} < \mathbf{n}+1$ и $1 \le \mathbf{L_n} < 2$;
$\mathbf{B_2}$ – случайное событие, состоящее в том, что $\mathbf{\Lambda} < \mathbf{n}+2$ и $2 \le \mathbf{L_n} < 3$;

…

$\mathbf{B_i}$ – случайное событие, состоящее в том, что $\mathbf{\Lambda} < \mathbf{n}+\mathbf{i}$ и $\mathbf{i} \le \mathbf{L_n} < \mathbf{i}+1$;

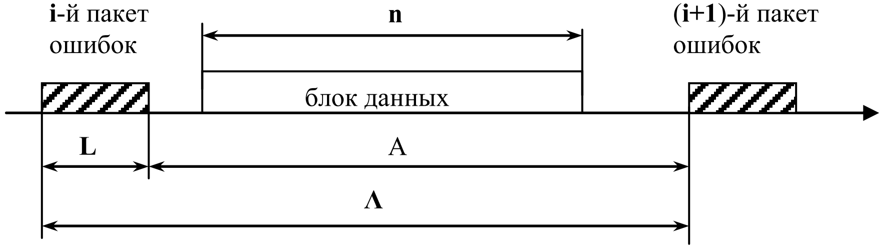

Рис. 1. Пояснение смысла случайной величины **А**

Случайные величины $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{L_n}$ являются независимыми. Тогда вероятности данных событий равны:

$$\mathbf{P(B_0) = P\{(\Lambda < n) \cap (0 \le L_п < 1)\} = P\{\Lambda < n\} \cdot P\{0 \le L_п < 1\};}$$

$$\mathbf{P(B_1) = P\{(\Lambda < n+1) \cap (1 \le L_п < 2)\} = P\{\Lambda < n+1\} \cdot P\{1 \le L_п < 2\};}$$

$$\mathbf{P(B_2) = P\{(\Lambda < n+2) \cap (2 \le L_п < 3)\} = P\{\Lambda < n+2\} \cdot P\{2 \le L_п < 3\};}$$

$$\mathbf{\ldots}$$

$$\mathbf{P(B_i) = P\{(\Lambda < n+i) \cap (i \le L_п < i+1)\} = P\{\Lambda < n+i\} \cdot P\{i \le L_п < i+1\}}.$$

$$\mathbf{\ldots}$$

Так как события $\mathbf{B_0}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, …, $\mathbf{B_i}$, … несовместны, то

$$\mathbf{P\left\{A < n\right\} = P(B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(B_i) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[P\{\Lambda < n+i\} \cdot P\{i \le L_п < i+1\}\right]}. \quad (2)$$

Вероятность $\mathbf{P}\{\mathbf{\Lambda} < \mathbf{n}+\mathbf{i}\}$ есть не что иное, как функция распределения СВ $\mathbf{\Lambda}$ от аргумента $\mathbf{n} + \mathbf{i}$:

$$\mathbf{P\left\{\Lambda < n+i\right\} = F_{\Lambda}(n+i) = 1 - (1 - P_п)^{n+i}}. \quad (3)$$

Для того, чтобы найти вероятность того, что значение СВ $\mathbf{L_n}$, распределённой по нормальному закону с параметрами $\mathbf{m_{l_n}}$ и $\mathbf{\sigma_{l_n}}$, попадет в интервал $[\mathbf{i}, \mathbf{i}+1)$, воспользуемся известной формулой [6]:

$$\mathbf{P\{i \le L_п < i+1\} = \Phi\left(\left(i+1-m_{l_n}\right)/\sigma_{l_n}\right) - \Phi\left(\left(i-m_{l_n}\right)/\sigma_{l_n}\right)}, \quad (4)$$

где $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ – функция Лапласа от аргумента $\mathbf{x}$.

Подставив (3), (4) в (2), получим функцию распределения СВ **А**

$$F_A(n) = P\{A < n\} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \left[1 - (1 - P_п)^{n+i} \right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{i + 1 - m_{l_n}}{\sigma_{l_n}} \right) - \Phi\left(\frac{i - m_{l_n}}{\sigma_{l_n}} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Тогда формула для вычисления вероятности правильной передачи пакета данных длиной **n** бит (1) примет вид

$$P_{пр\,п} = 1 - F_A(n) =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \left[1 - (1 - P_п)^{n+i} \right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{i + 1 - m_{l_n}}{\sigma_{l_n}} \right) - \Phi\left(\frac{i - m_{l_n}}{\sigma_{l_n}} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

При использовании для обнаружения ошибок циклического кода с производящим полиномом степени **r** событие, состоящее в обнаружении ошибки на приёмной стороне, можно понимать как событие, состоящее в том, что СВ длины безошибочного интервала **A** примет значение, меньшее **n**, а СВ длины пакета ошибок L_n примет значение, меньшее **r** +1 или значение, большее либо равное **r** + 1, с весовым коэффициентом $K = 1 - 1/2^r$ [1]:

$$\begin{aligned} P_{oo} &= P\{A < n\} \cdot \left[P\{L_n < r + 1\} + \left(1 - \frac{1}{2^r} \right) \cdot P\{L_n \ge r + 1\} \right] = \\ &= F_A(n) \cdot \left\{ F_{L_n}(r + 1) + \left(1 - \frac{1}{2^r} \right) \cdot \left[1 - F_{L_n}(r + 1) \right] \right\} = \\ &= F_A(n) \cdot \left\{ F_{L_n}(r + 1) + 1 - F_{L_n}(r + 1) - \frac{1}{2^r} \left[1 - F_{L_n}(r + 1) \right] \right\} = \\ &= F_A(n) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2^r} \left[1 - F_{L_n}(r + 1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как СВ L_n распределена по нормальному закону, то её функция распределения имеет вид

$$F_{L_n}(x) = P\{L_n < x\} = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - m_{l_n}}{\sigma_{l_n}} \right). \quad (8)$$

Подставив (5), (8) в (7), получим вероятность обнаружения ошибки

$$P_{oo} = \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\left[1-(1-P_п)^{n+i}\right]\cdot\left[\Phi\left(\frac{i+1-m_{l_n}}{\sigma_{l_n}}\right)-\Phi\left(\frac{i-m_{l_n}}{\sigma_{l_n}}\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{1}{2^r}\cdot\left[\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{r+1-m_{l_n}}{\sigma_{l_n}}\right)\right]\right\}. \quad (9)$$

При использовании циклического кода с исправлением ошибок кратности **t** вероятность правильного приёма или исправления ошибки в данном случае есть вероятность случайного события, состоящего в том, что длина безошибочного **A** интервала примет значение, не превышающее (**n** – **t**):

$$P_{испрп} = P\{A \ge n-t\} = 1 - P\{A < n-t\} = 1 - F_A(n-t) =$$
$$= 1-\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\left[1-(1-P_п)^{n-t+i}\right]\cdot\left[\Phi\left(\frac{i+1-m_{l_n}}{\sigma_{l_n}}\right)-\Phi\left(\frac{i-m_{l_n}}{\sigma_{l_n}}\right)\right]\right\}. \quad (10)$$

Приведенная модель позволяет с помощью выражений (6), (9), (10) рассчитать вероятностные характеристики систем передачи данных для каналов с памятью, распределение длин пакетов ошибок в которых близко к нормальному.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А.А., Ростовцев Ю.Г., Цибрин В.Г. Основы построения систем передачи данных. – Л.: ВИКИ им. А.Ф. Можайского, 1978. – 419 с.*
2. *Блох Э.Л., Попов О.В., Турин О.В. Модели источника ошибок в каналах передачи цифровой информации. – М.: Связь, 1971. – 312 с.*
3. *Бакланов И. Г. Тестирование и диагностика систем связи. – М.: Эко-Трендз, 2001. – 264 с.*
4. *Элементы теории передачи дискретной информации / Л.П. Пуртов, А.С. Замрий , Захаров А.И., Охорозин А.И. – М.: Связь, 1972. – 232 с.*
5. *Мовсесян В.М., Мовсесян Р.М. Оценка статистических характеристик канала передачи цифровой информации // Радиоэлектроника. – 1991. – №1. – С. 37 - 41.*
6. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.*

Поступила 15.04.2002

***КЛИМЕНКО Любовь Анатольевна**, канд. техн. наук, преподаватель Харьковской ГАЖТ. В 1995 году окончила ХИИТ. Область научных интересов – передача и обработка информации.*

***СУМЦОВ Дмитрий Викторович**, адъюнкт кафедры Харьковского военного университета. В 1995 году окончил Харьковский военный университет. Область научных*

интересов – управление обменом данными в вычислительных сетях.