УДК 519.24 : 621.396

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ПАРНОКОРРЕЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В СИЛЬНЫХ ПУАССОНОВСКИХ ШУМАХ

к.т.н. Т.А. Стрелкова, к.ф.-м.н. А.М. Стадник, С.И. Калмыков
(представил д.т.н., проф. А.И. Стрелков)

Предложена квазиоптимальная схема обнаружителя парнокоррелированного потока сигналов на фоне интенсивных пуассоновских шумов. Существенно более простая в реализации, чем синтезированная авторами ранее оптимальная по критерию Неймана - Пирсона схема обнаружителя, данная схема сводится к подсчету пар сигналов, разнесенных во времени не больше, чем интервал парной корреляции. Приведены условия ее применимости и дан их физический анализ.

1. Введение. Принципы и алгоритмы оптимального обнаружения и оценивания параметров оптического излучения на основе его фотонного представления являются ключевыми при разработке перспективных и совершенствовании существующих оптических систем связи и локации [1-5]. Эти же вопросы возникают и при синтезе алгоритмов обнаружения и оценивания различных параметров случайных потоков общего вида [6, 7], примерами которых могут служить модели процессов радиоактивности, тепловой эмиссии электронов и т.д.

Исторически сложилось так, что наиболее часто и плодотворно при решении задач обнаружения и оценивания оптического излучения использовалось его представление в виде пуассоновского потока сигнальных и шумовых фотонов [7, 8].

Широкая распространенность пуассоновской модели для описания случайных потоков самой разной природы связана как с ее простотой (поскольку в пуассоновском потоке отсутствуют корреляции между моментами появления событий потока), так и с возможностью получения замкнутых аналитических выражений. В то же время общепризнанным является понимание того, что для адекватного описания реальных процессов необходим учет корреляций между моментами появления событий случайного потока.

В тех случаях, когда интенсивность корреляций убывает с ростом их порядка (тройные корреляции слабее парных, четверные – слабее тройных и т.д.), основной эффект дают парные корреляции. Парнокоррелированным называют поток, у которого существенны лишь попарные корреляции между моментами наступления событий [6].

Особую актуальность эффекты парной корреляции отдельных фотонов [10] приобрели в последнее время в связи с работами в области квантовых компьютеров и квантовой криптографии [11].

Вопросы обнаружения парнокоррелированного потока рассматривались в предыдущих работах авторов [12, 13], где был синтезирован алгоритм оптимального по критерию Неймана-Пирсона обнаружителя, а также получены выражения и рекуррентные соотношения для функций, через которые выражаются плотности вероятности произвольного парнокоррелированного потока.

Практическая реализация полученных в [12, 13] алгоритмов обнаружения парнокоррелированного потока представляет собой довольно сложную задачу, включающую в себя расчеты либо по рекуррентным соотношениям, либо по громоздким комбинаторным формулам. При цифровой обработке и одно, и другое требует существенных затрат времени и оперативной памяти ЭВМ, что обуславливает необходимость разработки квазиоптимальных алгоритмов обнаружения парнокоррелированного потока.

Целью данной работы является построение квазиоптимальной схемы обнаружителя парнокоррелированного потока на фоне интенсивных пуассоновских шумов и анализ условий ее применимости.

2. Основные определения. В данной работе, как и в предыдущих [12, 13], при описании случайных потоков будет использоваться аппарат производящих функционалов. Напомним, следуя [6], основные определения.

Рассмотрим произвольный случайный поток – появление на временном интервале $(0,T)$ в случайные моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_k$ случайного числа k событий ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Как частный случай случайного процесса, он обычно описывается набором плотностей вероятности $\pi_k(\tau_1, \ldots, \tau_k; T)$.

При таком подходе $\pi_k(\tau_1, \ldots, \tau_k; T)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k$ представляет собой вероятность появления k событий в интервалах $d\tau_j$ около точек τ_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) и непоявления любого числа событий в остальной части интервала $(0,T)$. Симметричные (в силу неразличимости событий) относительно перестановок аргументов $\tau_1, \ldots, \tau_k$ плотности $\pi_k(\vec{\tau}; T) = \pi_k(\tau_1, \ldots, \tau_k; T)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\vec{\tau}\, \pi_k(\vec{\tau}; T) = 1, \tag{1}$$

где для упрощения записи введен вектор $\vec{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ и сокращение

$$\int d\vec{\tau} = \prod_{j=1}^{k} \int_0^T d\tau_j .$$

Существование еще трех эквивалентных систем функций [6] приводит к тому, что эквивалентное описание случайных потоков можно также эффективно осуществлять посредством производящего функционала (ПФЛ), определяемого как

$$\mathbf{L}[\mathbf{u};\mathbf{T}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\vec{\tau} \pi_k(\vec{\tau};T) \prod_{j=1}^{k} [1 + u(\tau_j)] ,$$

где $\mathbf{u}(\tau)$ - произвольная функция на интервале $(0, T)$. Отсюда следует, что плотности $\pi_k(\tau;T)$ представляют собой вариационные производные от производящего функционала $L[u;T]$ в точке $u(\tau) = -1$:

$$\pi_k(\tau;T) = \left. \frac{\delta^k L[u;T]}{\delta u(\tau_1) \ldots \delta u(\tau_k)} \right|_{\delta u(\tau_j) = -1} .$$

Представление ПФЛ в виде

$$L[u;T] = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\tau g_k(\tau) \prod_{j=1}^{k} u(\tau_j) \right] \tag{2}$$

является более удобным для характеристики случайных потоков по степени корреляции появления событий, поскольку вводимые таким образом корреляционные функции потока $g_k(\tau) \equiv g_k(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ отражают тенденцию k событий к группированию при положительных корреляциях и к их “расталкиванию” – при отрицательных.

Парнокоррелированным называется поток, у которого отличны от нуля только корреляционные функции $g_1(\tau)$ и $g_2(\tau_1, \tau_2)$, а его ПФЛ имеет, соответственно, вид [6]:

$$L[u;T] = \exp\left[\int_0^T d\tau g_1(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 g_2(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right]. \tag{3}$$

Как показано в [12, 13], плотности $\pi_k(\tau;T)$ для произвольного парнокоррелированного потока можно представить в виде

$$\pi_k(\tau_1, \ldots, \tau_k; T) = P_0(T) \prod_{i=1}^{k} \chi_1(\tau_i; T) U_k(\tau_1, \ldots, \tau_k; T) , \tag{4}$$

где функция

$$\chi_1(\tau;T) = g_1(\tau) - \int_0^T d\tau' g_2(\tau, \tau') ,$$

а $U_k(\tau_1, \ldots, \tau_k; T)$ при $k \geq 2$ находится из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} U_k(\tau_1, \ldots, \tau_k; T) = U_{k-1}(\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}; T) + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} q(\tau_i, \tau_k) U_{k-2}(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_{k-1}; T) \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями $U_0 = 1; \quad U_1(\tau_1) = 1$.

В соотношениях (5) $U_{k-2}(\tau_1 \ldots \tau_{i-1}, \tau_{i+1} \ldots \tau_{k-1}; T)$ – функция $k-2$ аргументов, получаемых из упорядоченного множества $(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{k-1})$ исключением i - го члена ($1 \leq i \leq k-1$), функция $q(\tau, \tau') = \dfrac{\chi_2(\tau, \tau')}{\chi_1(\tau; T)\chi_1(\tau'; T)}$, а $\chi_2(\tau, \tau') = g_2(\tau, \tau')$.

В формуле (4) вероятность того, что в интервале $(0, T)$ не появится ни одной точки, дается выражением

$$P_0(T) = \exp\left[-G_1(T) - \frac{1}{2} G_2(T)\right], \quad (6)$$

где величины $G_1(T)$ и $G_2(T)$ есть интегралы от корреляционных функций

$$G_1(T) = \int_0^T d\tau_1 g_1(\tau_1), \quad G_2(T) = \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 g_2(\tau_1, \tau_2).$$

Отметим также, что поскольку среднее число событий $\bar{n}$ по результатам наблюдения произвольного потока на всем интервале $(0, T)$ – находится как $\bar{n} = G_1(T)$, то $g_1(\tau)$ имеет смысл интенсивности потока.

3. Постановка задачи. Пусть на вход приемного устройства поступает смесь парнокоррелированного потока полезных сигналов, характеризуемого производящим функционалом

$$L^c[u; T] = \exp\left[\int_0^T d\tau g_1^c(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 g_2^c(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2)\right], \quad (7)$$

и пуассоновского потока шумовых сигналов, ПФЛ которого имеет, соответственно, вид

$$L^{ш}[u; T] = \exp\left[\int_0^T d\tau g_1^{ш}(\tau) u(\tau)\right], \quad (8)$$

где функции $g_1^c(\tau)$ и $g_2^c(\tau_1, \tau_2)$ представляют собой интенсивность и корреляционную функцию сигнального потока, а $g_1^{ш}(\tau)$ - интенсивность шумового потока.

Для статистически независимых сигнального и шумового потоков производящий функционал их суммы равен произведению парциальных ПФЛ [6]:

$$\mathbf{L}^{c+ш}[\mathbf{u};\mathbf{T}] = \mathbf{L}^{c}[\mathbf{u};\mathbf{T}] \cdot \mathbf{L}^{ш}[\mathbf{u};\mathbf{T}],$$

что в нашем случае с учетом (7) и (8) дает [12]:

$$\mathbf{L}^{c+ш}[\mathbf{u};\mathbf{T}] = \exp\left[\int_0^T d\tau g_1^{c+ш}(\tau)u(\tau) + \frac{1}{2}\int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 g_2^{c+ш}(\tau_1,\tau_2)u(\tau_1)u(\tau_2)\right], \quad (9)$$

где

$$\begin{gathered} g_1^{c+ш}(\tau) = g_1^{c}(\tau) + g_1^{ш}(\tau); \\ g_2^{c+ш}(\tau_1,\tau_2) = g_1^{c}(\tau_1,\tau_2). \end{gathered} \quad (10)$$

Таким образом, сумма двух независимых парнокоррелированного сигнального и пуассоновского шумового потоков также является парнокоррелированным потоком, корреляции которого выражаются через корреляции слагаемых посредством (10).

Для логарифма отношения правдоподобия $l = \ln\left(\dfrac{\pi_k^{c+ш}(\tau_1,\ldots,\tau_k;T)}{\pi_k^{ш}(\tau_1,\ldots,\tau_k;T)}\right)$ в [12] получено выражение

$$l = \ln U_k^{c+ш}(\tau_1\ldots\tau_k) + \sum_{i=1}^{k}\ln\left[1 + \frac{\chi_1^{c}(\tau_i;T)}{\chi_1^{ш}(\tau_i;T)}\right] + \ln P_0^{c}(T). \quad (11)$$

Здесь $U_k^{c+ш}(\tau_1\ldots\tau_k)$ определяется соотношениями (5), в которых теперь нужно полагать

$$q^{c+ш}(\tau',\tau'') = \frac{\chi_2^{c+ш}(\tau',\tau'')}{\chi_1^{c+ш}(\tau';T)\chi_1^{c+ш}(\tau'';T)}. \quad (12)$$

Так называемые χ - плотности [6] первого и второго порядков для смеси сигнала и шума равны:

$$\begin{gathered} \chi_1^{c+ш}(\tau;T) = \chi_1^{c}(\tau;T) + \chi_1^{ш}(\tau;T); \\ \chi_2^{c+ш}(\tau',\tau'') = \chi_2^{c}(\tau',\tau'') = g_2^{c}(\tau',\tau''), \end{gathered}$$

причем функции $\chi_1^{c}(\tau;T)$ и $\chi_1^{ш}(\tau;T)$ выражаются через корреляции как

$$\chi_1^{c}(\tau;T) = g_1^{c}(\tau) - \int_0^T d\tau' g_2^{c}(\tau,\tau'), \quad \chi_1^{ш}(\tau;T) = g_1^{ш}(\tau),$$

а вероятность отсутствия сигнала на всем интервале $(0,T)$, в соответствии с формулой (6), есть

$$P_0^{c}(T) = \exp\left[-G_1^{c}(T) + 1/2 \cdot G_2^{c}(T)\right],$$

где $G_1^c(T)=\int_0^T d\tau_1 g_1^c(\tau_1)$; $G_1^c(T)=\int_0^T d\tau_1\int_0^T d\tau_2 g_1^c(\tau_1,\tau_2)$.

Согласно (11), достаточную статистику образуют два первых слагаемых, и оптимальный обнаружитель содержит два параллельных канала. В первом из них производится обработка, соответствующая входному потоку не сливающихся в двукратные пар сигналов определенной статистической структуры, во втором – обработка, соответствующая пуассоновскому входному потоку интенсивности $\chi_1^c(\tau;T)$. Сумма вкладов от обоих каналов сравнивается затем с порогом $\mathbf{h}$, зависящим от априорной интегральной характеристики $\ln P_0^c(T)$ обнаруживаемого потока сигналов.

Теперь мы имеем все необходимые заготовки для синтеза квазиоптимального обнаружителя парнокоррелированных сигналов в пуассоновских шумах.

4. Квазиоптимальный обнаружитель парнокоррелированного потока. Рассмотрим случай уровня шумов, достаточно высокого для выполнения неравенства (впрочем, как будет показано ниже, это неравенство легко выполнить при высоком уровне парных корреляций в сигнальном потоке):

$$\chi_1^c(\tau_i;T) << \chi_1^ш(\tau_i;T). \tag{13}$$

Тогда во втором члене достаточной статистики (11) можно полагать

$$\sum_{i=1}^{k}\ln\left[1+\frac{\chi_1^c(\tau_i;T)}{\chi_1^ш(\tau_i;T)}\right]\approx\sum_{i=1}^{k}\frac{\chi_1^c(\tau_i;T)}{\chi_1^ш(\tau_i;T)}, \tag{14}$$

а в первом – пренебречь в знаменателе выражения для $q^{c+ш}(\tau',\tau'')$ слагаемыми $\chi_1^c(\tau_i;T)$ по сравнению с $\chi_1^ш(\tau_i;T)$ и приближенно считать, что

$$q^{c+ш}(\tau',\tau'')\approx\frac{g_2^c(\tau',\tau'')}{\chi_1^ш(\tau';T)\chi_1^ш(\tau'';T)}. \tag{15}$$

Если уровень шумов достаточно высок и для выполнения неравенства

$$\frac{g_2^c(\tau',\tau'')}{\chi_1^ш(\tau';T)\chi_1^ш(\tau'';T)}<<1, \tag{16}$$

то, в соответствии с (15), $q^{c+ш}(\tau',\tau'')<<1$, и в выражениях для $U_k^{c+ш}(\tau_1,\ldots,\tau_k)$ можно оставить только линейные по $q^{c+ш}(\tau',\tau'')$ члены. Тогда из рекуррентных соотношений (5) имеем

$$U_k^{c+ш}(\tau_1,\ldots,\tau_k;T)=1+\sum_{1\le i<j\le k}q^{c+ш}(\tau_i,\tau_j),$$

а для первого члена достаточной статистики

$$\ln U_k^{c+ш}(\tau_1, \dots, \tau_k; T) \approx \sum_{1 \le i < j \le k} q^{c+ш}(\tau_i, \tau_j). \tag{17}$$

Если, наконец, вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_1^c(\tau_i; T)}{\chi_1^ш(\tau_i; T)} << \sum_{1 \le i < j \le k} q^{c+ш}(\tau_i, \tau_j), \tag{18}$$

то для достаточной статистики имеем окончательно

$$l_{дост} = \frac{1}{\lambda_ш^2} \sum_{1 \le i < j \le k} g_2^c(\tau_i, \tau_j), \tag{19}$$

где для простоты предполагалось, что пуассоновский шумовой поток является стационарным: $\chi_1^ш(\tau; T) = g_1^ш(\tau) = \lambda_ш$. Простейшая структурная схема, соответствующая (19), представлена на рис. 1 (РУ – решающее устройство, **h** – порог принятия решения). По мере поступления сигналов в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_k$ производится вычисление функций $g_2^c(\tau_i, \tau_j)$, суммирование полученных значений и их сравнение с заданным порогом.

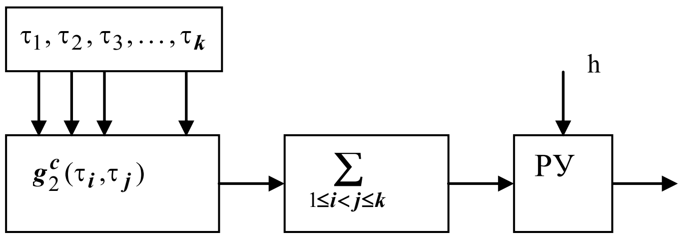

Рис. 1. Структурная схема квазиоптимального обнаружителя парнокоррелированного потока в пуассоновском шуме

В отличие от схемы оптимального обнаружителя, задаваемого выражением (11), квазиоптимальный обнаружитель (19), во-первых, является одноканальным, а во-вторых, для его построения не нужны сложные неалгебраические операции и расчет рекуррентных соотношений, поскольку он содержит только операцию попарного суммирования с весом $g_2^c(\tau_i, \tau_j)$. Более простая реализация приводит не только к ухудшению рабочих характеристик обнаружителя, но и к определенным ограничениям на его работу.

Раскроем физический смысл неравенств (13), (16) и (18), исходя из того, что степень парных корреляций в произвольном (в нашем случае – сигнальном) парнокоррелированном потоке определяется, как показано в [12], отношением $\mathbf{r(T)=G_2^c(T)/G_1^c(T)}$, причем значение $\mathbf{r(T)=0}$ соответствует отсутствию парных корреляций, а максимальное значение $\mathbf{r(T)=1}$ – вырождению в поток парных событий.

Проинтегрировав неравенства (13) и (16) по интервалу $\mathbf{(0,T)}$, получим:

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{n}}_c\left(1-\mathbf{r(T)}\right) << \lambda_{ш}\mathbf{T}; \\ &\mathbf{r(T)}\bar{\mathbf{n}}_c << \left(\lambda_{ш}\mathbf{T}\right)^2; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\lambda_{ш} << \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le k} g_2^c(\tau_i,\tau_j)}{\sum\limits_{i=1}^{k} \chi_1^c(\tau_i;T)}. \tag{21}$$

Первое из неравенств (20) легко выполнить, если парные корреляции в сигнальном потоке достаточно интенсивны $\mathbf{r(T)\approx 1}$. Тогда второе из них сводится к несколько необычному условию $\lambda_{ш} >> \sqrt{\bar{\mathbf{n}}_c}/\mathbf{T}$ (необычность заключается в наличии корня квадратного из среднего числа сигнальных событий).

Неравенство (21) накладывает на интенсивность шума ограничения сверху: дело в том, что высокая интенсивность шума проявляется в большой частоте следования шумовых сигналов, и могла бы по алгоритму (19) ошибочно восприниматься квазиоптимальным обнаружителем как проявление парных корреляций в сигнальном потоке.

При прямоугольной форме корреляционной функции $g_2^c(\tau_i,\tau_j)$ (когда $g_2^c(\tau_i,\tau_j)=\mathbf{const}$ при $|\tau_i-\tau_j|\le\Delta$ и $g_2^c(\tau_i,\tau_j)=0$ во всех остальных случаях, Δ – интервал парных корреляций), квазиоптимальное обнаружение заключается просто в подсчете пар сигналов, разнесенных во времени не больше, чем на Δ. Такая схема легко реализуется формированием (при поступлении каждого нового события) строба продолжительностью Δ, в течение которого открыт блок счетчика.

5. Заключение. Таким образом, в работе синтезирован квазиоптимальный алгоритм обнаружителя парнокоррелированного потока сигналов на фоне пуассоновских шумов. Данная схема существенно проще в реализации, чем оптимальная, поскольку сводится к подсчету пар сигналов, разнесенных во времени не больше, чем на интервал парной корреляции.

Условиями применимости данного алгоритма являются наличие интенсивных парных корреляций в сигнальном потоке и ограничения на уровень шумов: с одной стороны, он должен быть достаточно (в зависимости от уровня полезного сигнала) высоким, с другой – ограничен сверху, чтобы большая частота следования шумовых сигналов не воспринималась квазиоптимальным обнаружителем как проявление парных корреляций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шереметьев А.Г. Статистическая теория лазерной связи. – М.: Связь, 1971. – 264 с.*
2. *Гальярди Р.М., Карп Ш. Оптическая связь. – М.: Связь, 1978. – 424 с.*
3. *Lambert S.G., Casey W.L. Laser communications in space. - Boston : Artech House, 1995. – 390 p.*
4. *Волохатюк В.А., Кочетков В.М., Красовский Р.Р. Вопросы оптической локации. – М.: Сов. радио, 1971. – 256 с.*
5. *Курикша А.А. Квантовая оптика и оптическая локация. – М.: Сов. радио, 1973. – 184 с.*
6. *Большаков И.А., Ракошиц В.С. Прикладная теория случайных потоков. – М.: Сов. радио, 1978. – 248 с.*
7. *Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высш. школа, 1990. – 376 с.*
8. *Reiffen B., Sherman H. An optimum demodulator for Poisson processes // Proc. IEEE. – 1963. – Vol. 51, no 10. – P. 1316 - 1320.*
9. *Gagliardi R.M., Karp S. M-ary Poisson detection and optical communication // IEEE Trans. Commun. Technol. - 1969, Vol. COM-17, no 4. – P. 1611 - 1626.*
10. *Mandel L. Quantum effects in one-photon and two-photon interference // Rev. Mod. Phys. – 1999. – Vol. 71, no 2. – P. 274 - 282.*
11. *Steane A. Quantum computing // Rep. Prog. Phys. – 1998. – Vol. 61, no 2. –P. 117 - 173.*
12. *Стрелков А.И., Стадник А.М., Калмыков С.И., Лытюга А.П. Обнаружение парнокоррелированного потока сигналов на фоне пуассоновского шума // Радиотехника (Харьков). – 1999. – Вып. 112. – С. 3 - 11.*
13. *Стадник А.М. Оптимальное обнаружение парнокоррелированного потока сигналов на фоне парнокоррелированного шума // Радиофизика и радиоастрономия. – 1999. – Т. 4. – № 4. – С. 331 - 341.*

Поступила 25.06.2002

СТРЕЛКОВА Татьяна Александровна*, канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник научного центра при ХВУ. В 1992 году окончила радиофизический факультет ХГУ. Область научных интересов – цифровые методы обработки оптических сигналов, статистическая обработка оптических сигналов.*

СТАДНИК Александр Михайлович*, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник научного центра при ХВУ. В 1976 году окончил физический факультет ХГУ. Область научных интересов – распространение волн в случайно-неоднородных средах, математические методы оптимальной обработки сигналов.*

КАЛМЫКОВ Сергей Иванович*, доцент Харьковского военного университета. В 1979 году окончил Харьковское ВВКИУ им. Крылова. Область научных интересов – оптическая локация, цифровые методы обработки оптических сигналов.*