

## МЕТОД БЫСТРОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВОИЧНЫХ ДАННЫХ

проф. А.В. Королев

*Выводятся выражения для быстрого восстановления двоичных последовательностей при декодировании кодов числа серий. Проводится сравнительная оценка затрат количества операций для стандартного и быстрого алгоритмов декодирования.*

**Введение.** Восстановление двоичных данных, сжатых по методу, изложенному в [1], осуществляется по формуле

$$a_{ij} = \varphi^{-1}(N_j, f_i), \quad (1)$$

где  $N_j$  - код числа серий;

$f_i$  - весовой коэффициент элемента  $a_{ij}$ .

Из анализа выражения (1) следует, что основное количество операций, достигающее факториальной сложности, затрачивается на вычисление величин  $f_i$ . Поэтому для повышения оперативности обработки данных необходимо разработать быстрый метод декодирования кодов  $N_j$ .

**Разработка быстрого метода восстановления двоичных данных.** Для снижения количества операций декодирования требуется преобразовать факториальную схему вычисления  $f_i$  в рекурсивную.

Факториальная схема вычисления коэффициентов  $f_i$  имеет вид

$$f_i = \frac{(n+1)!}{(\psi_{i-1})! (n+1-\psi_{i-1})!}, \quad (2)$$

где  $\psi_{i-1}$  - промежуточный параметр вычисления коэффициента  $f_i$ ;

$n$  - длина восстанавливаемой последовательности двоичных элементов.

Для замены факториальной схемы вычисления величин  $f_i$  (2) на рекурсивную требуется установить связь между значениями  $f_i$  на  $i$ -м шаге и  $f_{i-1}$  на  $(i-1)$ -м шаге

$$f_i = \varphi_p(f_{i-1}), \quad (3)$$

где  $\varphi_p$  - функция вычисления  $f_i$  по заданному значению  $f_{i-1}$ .

*Определим вид функции  $\varphi_p$ .* Для этого проанализируем выражение (2) для  $i$ -го и  $(i-1)$ -го шагов. Откуда делаем вывод, что для установления связи

между величинами  $f_i$  и  $f_{i-1}$  необходимо установить связь между  $\Psi_{i-1}$  и  $\Psi_{i-2}$ :

$$\Psi_{i-1} = s_{i-1} - a_{i-1,j}; \quad (4)$$

$$\Psi_{i-2} = s_{i-2} - a_{i-2,j}, \quad (5)$$

где  $a_{i-1,j}$  и  $a_{i-2,j}$  - двоичные элементы соответственно на  $(i-1)$ -м и  $(i-2)$ -м шагах.

При этом величина  $s_{i-1}$  вычисляется через  $s_{i-2}$  на основе соотношения

$$s_{i-1} = s_{i-2} - |a_{i-2,j} - a_{i-1,j}|. \quad (6)$$

Подставив выражение (7) в (5), получим

$$\Psi_{i-1} = s_{i-2} - |a_{i-2,j} - a_{i-1,j}| - a_{i-1,j}. \quad (7)$$

Поскольку величина  $\Psi_{i-2}$  зависит от  $s_{i-2}$ , то на основе выражения (7) можно установить связь между  $\Psi_{i-1}$  и  $\Psi_{i-2}$ . Для этого проанализируем зависимость величины  $\Psi_{i-1}$  от значений  $a_{i-1,j}$  и  $a_{i-2,j}$ . При этом рассмотрим следующие случаи.

1. Случай, когда  $a_{i-1,j} = a_{i-2,j}$ .
2. Случай, когда  $a_{i-1,j} \neq a_{i-2,j}$ .

Из анализа различных значений, принимаемых элементами  $a_{i-1,j}$  и  $a_{i-2,j}$ , для рассмотренных случаев следует, что величины  $\Psi_{i-1}$  и  $\Psi_{i-2}$  принимают значения, которые задаются системами:

$$\Psi_{i-1} = \begin{cases} s_{i-2}, & \text{если } a_{i-1,j} = 1, \text{ а } a_{i-2,j} = 0; \\ s_{i-2} - 1, & \text{если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j} = 1; \\ s_{i-2}, & \text{если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\Psi_{i-2} = \begin{cases} s_{i-2}, & \text{если } a_{i-2,j} = 0, \text{ а } (a_{i-1,j} - \text{любое}); \\ s_{i-2} - 1, & \text{если } a_{i-2,j} = 1, \text{ а } (a_{i-1,j} - \text{любое}). \end{cases} \quad (9)$$

Перепишем систему (9) относительно  $s_{i-2}$ :

$$s_{i-2} = \begin{cases} \Psi_{i-2}, & \text{если } a_{i-2,j} = 0, \text{ а } (a_{i-1,j} - \text{любое}); \\ \Psi_{i-2} + 1, & \text{если } a_{i-2,j} = 1, \text{ а } (a_{i-1,j} - \text{любое}). \end{cases} \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в (8), получим зависимость между величинами  $\Psi_{i-1}$  и  $\Psi_{i-2}$  для разных значений  $a_{i-1,j}$  и  $a_{i-2,j}$ :

$$\Psi_{i-1} = \begin{cases} \Psi_{i-2}, & \text{если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j} = 1; \\ \Psi_{i-2} - 2, & \text{если } a_{i-1,j} = 1, \text{ а } a_{i-2,j} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Запишем теперь выражения (2) для нахождения величины  $f_i$  с учётом системы (11):

$$f_i = \begin{cases} \frac{(n-i+1)!}{(t_{i-2})! (n-i+1-t_{i-2})!}, & \text{если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j}; \\ \frac{(n-i+1)!}{(t_{i-2}-2)! (n-i+3-t_{i-2})!}, & \text{если } a_{i-1,j} = 1, \text{ а } a_{i-2,j} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Преобразуем первую часть системы (12) к виду

$$\frac{(n-i+1)!}{(\Psi_{i-2})! (n-i+1-\Psi_{i-2})!} = \frac{(n-i+2)!}{(\Psi_{i-2})! (n-i+2-\Psi_{i-2})!} \times \frac{(n-i+2-\Psi_{i-2})}{(n-i+2)}. \quad (13)$$

Сравнивая выражение (2) на  $(i-1)$ -м шаге и формулу (13) приходим к выводу, что первый множитель (13) равен  $f_{i-1}$ . Тогда для упрощения выражения (13) введём следующие замены:

$$Q_{0,i-1} = (n-i+2); \quad Q_{1,i-1} = (n-i+2 - t_{i-2}).$$

Подставляя выражение (4) и обозначения для параметров  $Q_{0,i-1}$ ,  $Q_{1,i-1}$  в (13), получим функциональную зависимость между величинами  $f_i$  и  $f_{i-1}$ :

$$f_i = f_{i-1} \times \frac{Q_{1,i-1}}{Q_{0,i-1}}, \text{ если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j} = 1. \quad (14)$$

С учётом принятых обозначений параметры  $Q_{0,i-1}$ ,  $Q_{1,i-1}$  равны

$$Q_{0,i-1} = (n-i+1)+1 = Q_{0i} + 1; \quad Q_{1,i-1} = (n-i+1-\Psi_{i-1})+1 = Q_{1i} + 1,$$

а формула (14) примет вид

$$f_i = f_{i-1} \times \frac{(Q_{1,i} + 1)}{(Q_{0,i} + 1)}, \text{ если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j} = 1. \quad (15)$$

Выражение (15) является частным случаем функции  $\Phi_p$ , когда  $a_{i-1,j} = a_{i-2,j}$  или  $a_{i-1,j} = 0$ , а  $a_{i-2,j} = 1$ .

Получим функцию  $\Phi_p$  для варианта  $a_{i-1,j} = 1$ , а  $a_{i-2,j} = 0$ . Для этого преобразуем вторую часть выражения (12):

$$\frac{(n-i+1)!}{(\psi_{i-2}-2)!(n-i+3-\psi_{i-2})!} = \frac{(n-i+2)!}{(\psi_{i-2})!(n-i+2-\psi_{i-2})!} \times \frac{(t_{i-2}-1)(\psi_{i-2})}{(n-i+2)(n-i+3-\psi_{i-2})}. \quad (16)$$

Принимая во внимание то, что первый множитель (16) равен  $f_{i-1}$ , а  $(n-i+2) = Q_{0i} + 1$ ,  $(n-i+3-\psi_{i-2}) = (n-i+1-\psi_{i-1}) = Q_{1i}$ ,  $t_{i-1}-1 = Q_{2i}-1$  и  $\psi_{i-2} = \psi_{i-1} + 2 = Q_{2i} + 2$ , получим функциональную зависимость между величинами  $f_i$  и  $f_{i-1}$ :

$$f_i = f_{i-1} \times \frac{(Q_{2,i}-1)(Q_{2,i}-1)}{(Q_{0,i}+1)Q_{1i}}, \text{ если } a_{i-1,j} = 1, \text{ а } a_{i-2,j} = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) задает вид функции  $\Phi_p$  для случая, когда  $a_{i-1,j} = 1$ , а  $a_{i-2,j} = 0$ .

Таким образом, выведены выражения (15) и (17), позволяющие заметить факториальную схему вычисления величин  $f_i$  на рекурсивную.

**Сравнительная оценка количества операций для факториальной и рекурсивной схем вычисления коэффициентов  $f_i$ .** Определим количество операций, требуемых на восстановление двоичной последовательности по рекурсивной схеме. В общем случае максимальное количество операций для нахождения величины  $f_i$  при известном  $f_{i-1}$  по рекурсивной схеме состоит из 4 операций умножения, сложения, деления и 2 операций сравнения. Поэтому восстановление одной двоичной последовательности длиной  $n$  элементов (с учётом затрат операций на получение начального значения величины  $f_i$ ) связано с выполнением  $\nu_p$  операций

$$\nu_p = 4\mathfrak{G} + 12n + 2, \quad (18)$$

где  $\mathfrak{G}$  – число серий одинаковых элементов изображения.

Для факториальной схемы вычисления величин  $f_i$  затрачивается количество операций  $\nu_\Phi$ , равное [2]:

$$\nu_\Phi = 2n^2 + 18n + 4. \quad (19)$$

Сравнительная оценка количества операций для факториальной схемы вычисления  $\nu_\Phi$  и рекурсивной  $\nu_p$  в зависимости от длины последовательности  $n$  и числа серий  $\mathfrak{G}$  представлена на рис. 1. Расчёты для рекурсивной схемы проводились по выражению (18), а для факториальной – по (19).

Из анализа графиков данных следует, что для рекурсивной схемы вычисления коэффициентов  $f_i$  двоичная последовательность восстанавливается в среднем от **1.3** до **5** раз (в зависимости от числа серий  $\mathcal{Q}$ ) быстрее, чем для факториальной схемы нахождения величин  $f_i$ .

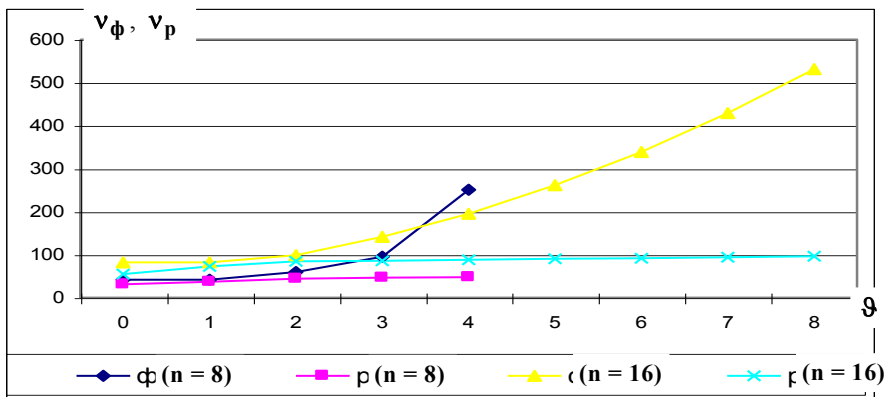


Рис. 1. Графики значений количества операций  $v_\phi$  и  $v_\rho$  в зависимости от числа серий  $\mathcal{Q}$  для  $n = 8$  и  $n = 16$

**Выводы.** Из рассмотренного материала можно сделать следующие выводы:

1. Разработан быстрый метод восстановления двоичных последовательностей, основанный на переходе от факториальной схемы вычисления весовых коэффициентов  $f_i$  к рекурсивной.

2. Количество операций на восстановление последовательности элементов для рекурсивной схемы вычисления коэффициентов  $f_i$  сокращается от **1.3** до **5** раз в зависимости от числа серий по сравнению с факториальной схемой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Королёв А.В. Баранник В.В. Оценка количества информации изображения по числу серий одинаковых элементов // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 2(18).– С. 43 – 46.
2. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

Поступила 3.07.2002

**КОРОЛЕВ Анатолий Викторович**, профессор, канд. техн. наук, профессор кафедры ХВУ. В 1969 году окончил Харьковское ВКИУ. Область научных интересов – обработка и передача информации.