УДК 621.327

МЕТОД БЫСТРОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВОИЧНЫХ ДАННЫХ

проф. А.В. Королев

Выводятся выражения для быстрого восстановления двоичных последовательностей при декодировании кодов числа серий. Проводится сравнительная оценка затрат количества операций для стандартного и быстрого алгоритмов декодирования.

Введение. Восстановление двоичных данных, сжатых по методу, изложенному в [1], осуществляется по формуле

$$\mathbf{a_{ij}} = \varphi^{-1}\left(\mathbf{N_j}, \mathbf{f_i}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{N_j}$ - код числа серий;

$\mathbf{f_i}$ - весовой коэффициент элемента $\mathbf{a_{ij}}$.

Из анализа выражения (1) следует, что основное количество операций, достигающее факториальной сложности, затрачивается на вычисление величин $\mathbf{f_i}$. Поэтому для повышения оперативности обработки данных необходимо разработать быстрый метод декодирования кодов $\mathbf{N_j}$.

Разработка быстрого метода восстановления двоичных данных. Для снижения количества операций декодирования требуется преобразовать факториальную схему вычисления $\mathbf{f_i}$ в рекурсивную.

Факториальная схема вычисления коэффициентов $\mathbf{f_i}$ имеет вид

$$\mathbf{f_i} = \frac{(\mathbf{n}+1)!}{(\psi_{\mathbf{i}-1})!\,(\mathbf{n}+1-\psi_{\mathbf{i}-1})!}, \tag{2}$$

где $\psi_{\mathbf{i}-1}$ - промежуточный параметр вычисления коэффициента $\mathbf{f_i}$;

n - длина восстанавливаемой последовательности двоичных элементов.

Для замены факториальной схемы вычисления величин $\mathbf{f_i}$ (2) на рекурсивную требуется установить связь между значениями $\mathbf{f_i}$ на **i**-м шаге и $\mathbf{f_{i-1}}$ на (**i – 1**)-м шаге

$$\mathbf{f_i} = \varphi_{\mathbf{p}}\left(\mathbf{f_{i-1}}\right), \tag{3}$$

где $\varphi_{\mathbf{p}}$ - функция вычисления $\mathbf{f_i}$ по заданному значению $\mathbf{f_{i-1}}$.

Определим вид функции $\varphi_{\mathbf{p}}$. Для этого проанализируем выражение (2) для **i**-го и (**i – 1**)-го шагов. Откуда делаем вывод, что для установления связи между величинами $\mathbf{f_i}$ и $\mathbf{f_{i-1}}$ необходимо установить связь между $\psi_{\mathbf{i-1}}$ и $\psi_{\mathbf{i-2}}$:

$$\psi_{\mathbf{i-1}} = \mathbf{s_{i-1}} - \mathbf{a_{i-1,j}}; \tag{4}$$

$$\psi_{\mathbf{i-2}} = \mathbf{s_{i-2}} - \mathbf{a_{i-2,j}}, \tag{5}$$

где $\mathbf{a_{i-1,j}}$ и $\mathbf{a_{i-2,j}}$ - двоичные элементы соответственно на (**i – 1**)-м и (**i – 2**)-м шагах.

При этом величина $\mathbf{s_{i-1}}$ вычисляется через $\mathbf{s_{i-2}}$ на основе соотношения

$$\mathbf{s_{i-1}} = \mathbf{s_{i-2}} - \left| \mathbf{a_{i-2,j}} - \mathbf{a_{i-1,j}} \right|. \tag{6}$$

Подставив выражение (7) в (5), получим

$$\psi_{\mathbf{i-1}} = \mathbf{s_{i-2}} - \left| \mathbf{a_{i-2,j}} - \mathbf{a_{i-1,j}} \right| - \mathbf{a_{i-1,j}}. \tag{7}$$

Поскольку величина $\psi_{\mathbf{i-2}}$ зависит от $\mathbf{s_{i-2}}$, то на основе выражения (7) можно установить связь между $\psi_{\mathbf{i-1}}$ и $\psi_{\mathbf{i-2}}$. Для этого проанализируем зависимость величины $\psi_{\mathbf{i-1}}$ от значений $\mathbf{a_{i-1,j}}$ и $\mathbf{a_{i-2,j}}$. При этом рассмотрим следующие случаи.

1. Случай, когда $\mathbf{a_{i-1,j}} = \mathbf{a_{i-2,j}}$.

2. Случай, когда $\mathbf{a_{i-1,j}} \neq \mathbf{a_{i-2,j}}$.

Из анализа различных значений, принимаемых элементами $\mathbf{a_{i-1,j}}$ и $\mathbf{a_{i-2,j}}$, для рассмотренных случаев следует, что величины $\psi_{\mathbf{i-1}}$ и $\psi_{\mathbf{i-2}}$ принимают значения, которые задаются системами:

$$\psi_{\mathbf{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{s_{i-2}}, & \text{если } \mathbf{a_{i-1,j}} = \mathbf{1}, \text{ а } \mathbf{a_{i-2,j}} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{s_{i-2}} - \mathbf{1}, & \text{если } \mathbf{a_{i-1,j}} = \mathbf{a_{i-2,j}} \text{ или } \mathbf{a_{i-1,j}} = \mathbf{0}, \text{ а } \mathbf{a_{i-2,j}} = \mathbf{1}; \\ \mathbf{s_{i-2}}, & \text{если } \mathbf{a_{i-1,j}} = \mathbf{a_{i-2,j}} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi_{\mathbf{i-2}} = \begin{cases} \mathbf{s_{i-2}}, & \text{если } a_{\mathbf{i-2,j}} = \mathbf{0}, \text{ а } (\mathbf{a_{i-1,j}} - \text{любое}); \\ \mathbf{s_{i-2}} - \mathbf{1}, & \text{если } \mathbf{a_{i-2,j}} = \mathbf{1}, \text{ а } (\mathbf{a_{i-1,j}} - \text{любое}). \end{cases} \tag{9}$$

Перепишем систему (9) относительно $\mathbf{s_{i-2}}$:

$$\mathbf{s_{i-2}} = \begin{cases} \psi_{\mathbf{i-2}}, & \text{если } \mathbf{a_{i-2,j}} = \mathbf{0}, \text{ а } (\mathbf{a_{i-1,j}} - \text{любое}); \\ \psi_{\mathbf{i-2}} + \mathbf{1}, & \text{если } \mathbf{a_{i-2,j}} = \mathbf{1}, \text{ а } (\mathbf{a_{i-1,j}} - \text{любое}). \end{cases} \tag{10}$$

Подставив выражение (10) в (8), получим зависимость между величинами ψ_{i-1} и ψ_{i-2} для разных значений $a_{i-1,j}$ и $a_{i-2,j}$:

$$\psi_{i-1} = \begin{cases} \psi_{i-2}, & \text{если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j} = 1; \\ \psi_{i-2} - 2, & \text{если } a_{i-1,j} = 1, \text{ а } a_{i-2,j} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Запишем теперь выражения (2) для нахождения величины f_i с учётом системы (11):

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{(n-i+1)!}{(t_{i-2})!\,(n-i+1-t_{i-2})!}, \\ \text{если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j}; \\ \dfrac{(n-i+1)!}{(t_{i-2}-2)!\,(n-i+3-t_{i-2})!}, \\ \text{если } a_{i-1,j} = 1, \text{ а } a_{i-2,j} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Преобразуем первую часть системы (12) к виду

$$\frac{(n-i+1)!}{(\psi_{i-2})!\,(n-i+1-\psi_{i-2})!} = \frac{(n-i+2)!}{(\psi_{i-2})!\,(n-i+2-\psi_{i-2})!} \times \frac{(n-i+2-\psi_{i-2})}{(n-i+2)}. \quad (13)$$

Сравнивая выражение (2) на $(i-1)$-м шаге и формулу (13) приходим к выводу, что первый сомножитель (13) равен f_{i-1}. Тогда для упрощения выражения (13) введём следующие замены:

$$Q_{0,i-1} = (n-i+2); \quad Q_{1,i-1} = (n-i+2-t_{i-2}).$$

Подставляя выражение (4) и обозначения для параметров $Q_{0,i-1}$, $Q_{1,i-1}$ в (13), получим функциональную зависимость между величинами f_i и f_{i-1}:

$$f_i = f_{i-1} \times \frac{Q_{1,i-1}}{Q_{0,i-i}}, \text{ если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j} = 1. \quad (14)$$

С учётом принятых обозначений параметры $Q_{0,i-1}$, $Q_{1,i-1}$ равны

$$Q_{0,i-1} = (n-i+1)+1 = Q_{0i}+1; \quad Q_{1,i-1} = (n-i+1-\psi_{i-1})+1 = Q_{1i}+1,$$

а формула (14) примет вид

$$f_i = f_{i-1} \times \frac{(Q_{1,i}+1)}{(Q_{0,i}+1)}, \text{ если } a_{i-1,j} = a_{i-2,j} \text{ или } a_{i-1,j} = 0, \text{ а } a_{i-2,j} = 1. \quad (15)$$

Выражение (15) является частным случаем функции φ_p, когда $a_{i-1,j} = a_{i-2,j}$ или $a_{i-1,j} = 0$, а $a_{i-2,j} = 1$.

Получим функцию φ_p для варианта $a_{i-1,j} = 1$, а $a_{i-2,j} = 0$. Для этого преобразуем вторую часть выражения (12):

$$\frac{(n-i+1)!}{(\psi_{i-2}-2)!\,(n-i+3-\psi_{i-2})!} = \frac{(n-i+2)!}{(\psi_{i-2})!\,(n-i+2-\psi_{i-2})!} \times \frac{(t_{i-2}-1)(\psi_{i-2})}{(n-i+2)(n-i+3-\psi_{i-2})}. \quad (16)$$

Принимая во внимание то, что первый сомножитель (16) равен f_{i-1}, а $(n-i+2) = Q_{0i}+1$, $(n-i+3-\psi_{i-2}) = (n-i+1-\psi_{i-1}) = Q_{1i}$, $t_{i-1}-1 = Q_{2i}-1$ и $\psi_{i-2} = \psi_{i-1}+2 = Q_{2i}+2$, получим функциональную зависимость между величинами f_i и f_{i-1}:

$$f_i = f_{i-1} \times \frac{(Q_{2,i}-1)(Q_{2,i}-1)}{(Q_{0,i}+1)Q_{1i}}, \text{ если } a_{i-1,j} = 1, \text{ а } a_{i-2,j} = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) задает вид функции φ_p для случая, когда $a_{i-1,j} = 1$, а $a_{i-2,j} = 0$.

Таким образом, выведены выражения (15) и (17), позволяющие заменить факториальную схему вычисления величин f_i на рекурсивную.

Сравнительная оценка количества операций для факториальной и рекурсивной схем вычисления коэффициентов f_i. Определим количество операций, требуемых на восстановление двоичной последовательности по рекурсивной схеме. В общем случае максимальное количество операций для нахождения величины f_i при известном f_{i-1} по рекурсивной схеме состоит из **4** операций умножения, сложения, деления и **2** операций сравнения. Поэтому восстановление одной двоичной последовательности длиной **n** элементов (с учётом затрат операций на получение начального значения величины f_i) связано с выполнением ν_p операций

$$\nu_p = 4\vartheta + 12n + 2, \quad (18)$$

где ϑ – число серий одинаковых элементов изображения.

Для факториальной схемы вычисления величин f_i затрачивается количество операций $\nu_ф$, равное [2]:

$$\nu_ф = 2n^2 + 18n + 4. \quad (19)$$

Сравнительная оценка количества операций для факториальной схемы вычисления $\nu_ф$ и рекурсивной ν_p в зависимости от длины последовательности **n** и числа серий ϑ представлена на рис. 1. Расчёты для рекурсивной схемы проводились по выражению (18), а для факториальной – по (19).

Из анализа графиков данных следует, что для рекурсивной схемы вычисления коэффициентов $\mathbf{f_i}$ двоичная последовательность восстанавливается в среднем от **1.3** до **5** раз (в зависимости от числа серий ϑ) быстрее, чем для факториальной схемы нахождения величин $\mathbf{f_i}$.

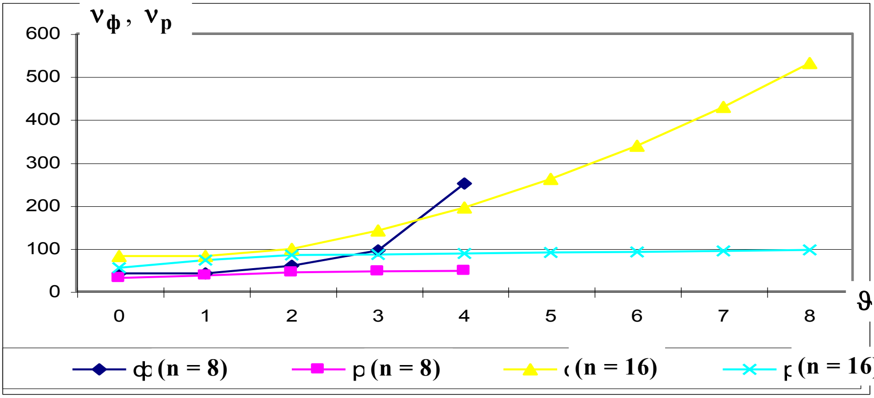

Рис. 1. Графики значений количества операций $\nu_\text{ф}$ и $\nu_\text{р}$ в зависимости от числа серий ϑ для **n = 8** и **n = 16**

Выводы. Из рассмотренного материала можно сделать следующие выводы:

1. Разработан быстрый метод восстановления двоичных последовательностей, основанный на переходе от факториальной схемы вычисления весовых коэффициентов $\mathbf{f_i}$ к рекурсивной.

2. Количество операций на восстановление последовательности элементов для рекурсивной схемы вычисления коэффициентов $\mathbf{f_i}$ сокращается от **1.3** до **5** раз в зависимости от числа серий по сравнению с факториальной схемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Королёв А.В. Баранник В.В. Оценка количества информации изображения по числу серий одинаковых элементов // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2(18).– С. 43 – 46.*
2. *Корн Г. Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 831 с.*

Поступила 3.07.2002

***КОРОЛЕВ Анатолий Викторович**, профессор, канд. техн. наук, профессор кафедры ХВУ. В 1969 году окончил Харьковское ВКИУ. Область научных интересов – обработка и передача информации.*