УДК 623. 021: 005

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА В ХОДЕ ВСТРЕЧНОЙ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ ДВУХ ГРУППИРОВОК

к.т.н. В.Б. Кононов, к.т.н. Ю.И. Кушнерук, Д.И. Евстрат
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье излагается метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс управления распределением сил и средств оперирующих сторон в ходе конфликтной ситуации.

Рассмотрим конфликтную ситуацию между сторонами **B** и **A**, описываемую системой дифференциальных уравнений [1],

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -by(t) + u(t); \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -ax(t) + v(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени **t**; $a = \alpha P$ и $b = \beta Q$ – эффективные скорострельности группировок **A** и **B;** α и β – средние скорострельности (число выстрелов в единицу времени) сторон **A** и **B**; **P** и **Q** – вероятности поражения одним выстрелом боевых средств сторон **A** и **B;** $u(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны **A;** $v(t)$ **–** интенсивность поступления средств резерва стороны **B;** **T** – заданное время боя.

В рассматриваемой конфликтной ситуации ставится задача уничтожить как можно больше основных средств противодействующей стороны. При этом сторона **A** стремится выбрать свои управляющие параметры $u(t)$ таким образом, чтобы к концу конфликтной ситуации (в момент времени **T**), суммарное количество основных сил стороны **B** было минимально [2].

Используя соотношения (1) предлагаемый критерий представим как задачу управления распределением средств резерва в виде:

$$y(T) \to \min;$$

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -by(t)+u(t);\\ \frac{dy(t)}{dt} &= -ax(t)+v(t);\end{aligned}\qquad(2)$$

$$x(0)=x_0;\ \ y(0)=y_0;\ \ 0\le u(t)\le c;\ \int\limits_0^T u(t)\,dt\le A_0,$$

где c – ограничение, определяющее темпы поступления резерва; A_0 – ограничение, определяющее общее количество средств резерва.

Рассматриваемая задача оптимального управления представляет собой так называемую задачу Майера [3] с закрепленным временем и свободным правым концом.

Сначала найдём аналитическое решение системы дифференциальных уравнений задачи (2).

Составим характеристическое уравнение системы (1):

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -b\\ -a & -\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2-ab=0.$$

Оно имеет корни: $\lambda_1=\sqrt{ab},\ \lambda_2=-\sqrt{ab}$.

Представим решение однородной системы уравнений, соответствующей для (1) в виде:

$$\begin{aligned}&\overline{x_1^{(t)}}=\gamma_{11}e^{\lambda_1(t)},\ \ \overline{y_1^{(t)}}=\gamma_{12}e^{\lambda_1(t)};\\ &\overline{x_2^{(t)}}=\gamma_{21}e^{\lambda_2(t)},\ \ \overline{y_2^{(t)}}=\gamma_{22}e^{\lambda_2(t)},\end{aligned}\qquad(3)$$

где $\gamma_{ij}\,(i=1,2;\ j=1,2)$ определяются с точностью до множителя из однородной системы линейных уравнений. Решим данную систему уравнений для случая $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$. Получим следующие две системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases}-\sqrt{ab}\gamma_{11}-b\gamma_{12}=0;\\ -a\gamma_{11}-\sqrt{ab}\gamma_{12}=0;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}-\sqrt{ab}\gamma_{21}-b\gamma_{22}=0;\\ -a\gamma_{21}+\sqrt{ab}\gamma_{22}=0;\end{cases}$$

$$\gamma_{11}=-\frac{\sqrt{ab}}{a}\gamma_{12};\qquad \gamma_{21}=+\frac{\sqrt{ab}}{a}\gamma_{22};$$

$$\gamma_{12}=a;\ \gamma_{11}=-\sqrt{ab};\ \gamma_{22}=a;\ \gamma_{21}=\sqrt{ab}.$$

Характеристическому числу $\lambda_1=\sqrt{ab}$ соответствует частное решение:

$$\overline{x_1^{(t)}}=-\sqrt{ab}\,e^{\sqrt{ab}t};\quad \overline{y_1^{(t)}}=ae^{\sqrt{ab}t}.$$

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$:

$$\overline{x_2^{(t)}} = \sqrt{ab}e^{-\sqrt{ab}t} \; ; \; \overline{y_2^{(t)}} = ae^{-\sqrt{ab}t} .$$

Общим решением однородной системы дифференциальных уравнений будет:

$$\overline{x(t)} = -\sqrt{ab} \cdot c_1 e^{\sqrt{ab}t} + \sqrt{ab} \cdot c_2 e^{-\sqrt{ab}t} \; ;$$

$$\overline{y(t)} = a \cdot c_1 e^{\sqrt{ab}t} + a \cdot c_2 e^{-\sqrt{ab}t} .$$

Методом вариации произвольных постоянных построим общее решение неоднородной системы (1). Решение будем искать в виде:

$$x(t) = -\sqrt{ab} \cdot c_1(t) \cdot e^{\sqrt{ab}t} + \sqrt{ab} \cdot c_2(t) \cdot e^{-\sqrt{ab}t} \; ;$$

$$y(t) = a \cdot c_1(t) \cdot e^{\sqrt{ab}t} + a \cdot c_2(t) \cdot e^{-\sqrt{ab}t} ,$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ – некоторые непрерывные дифференцируемые функции от t, определяемые из системы:

$$\begin{cases} -\sqrt{ab} \cdot c_1'(t) \cdot e^{\sqrt{ab}t} + \sqrt{ab} \cdot c_2'(t) \cdot e^{-\sqrt{ab}t} = u(t) ; \\ a \cdot c_1'(t) \cdot e^{\sqrt{ab}t} + a \cdot c_2'(t) \cdot e^{-\sqrt{ab}t} = v(t) . \end{cases}$$

Находим $c_1'(t)$ и $c_2'(t)$:

$$c_1'(t) = \left[-\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{-\sqrt{ab}t} \; ;$$

$$c_2'(t) = \left[\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{\sqrt{ab}t} ,$$

откуда

$$c_1(t) = \int \left[-\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{-\sqrt{ab}t} dt + c_1^0 \; ;$$

$$c_2(t) = \int \left[\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{\sqrt{ab}t} dt + c_2^0 .$$

Окончательно, система (1) имеет решение следующего вида:

$$x(t)=e^{\sqrt{ab}t}\int_0^t\left[\frac{1}{2}u(\tau)-\frac{\sqrt{ab}}{2a}v(\tau)\right]e^{-\sqrt{ab}\tau}d\tau+$$

$$+e^{-\sqrt{ab}t}\int_0^t\left[\frac{1}{2}u(\tau)+\frac{\sqrt{ab}}{2a}v(\tau)\right]e^{\sqrt{ab}\tau}d\tau-c_1^0\sqrt{ab}\;e^{\sqrt{ab}t}+c_2^0\sqrt{ab}\;e^{-\sqrt{ab}t}=$$

$$=\int_0^t\left[\frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)}+e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2}u(\tau)-\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)}-e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2}v(\tau)\right]d\tau-$$

$$-c_1^0\sqrt{ab}\;e^{\sqrt{ab}t}+c_2^0\sqrt{ab}\;e^{-\sqrt{ab}t}= \tag{4}$$

$$=\int_0^t\left[\operatorname{ch}\sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau)-\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{sh}\sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau)\right]d\tau-c_1^0\sqrt{ab}e^{\sqrt{ab}t}+c_2^0\sqrt{ab}e^{-\sqrt{ab}t};$$

$$y(t)=e^{\sqrt{ab}t}\int_0^t\left[-\frac{a}{2\sqrt{ab}}u(\tau)+\frac{1}{2}v(\tau)\right]e^{-\sqrt{ab}\tau}d\tau+$$

$$+e^{-\sqrt{ab}t}\int_0^t\left[\frac{a}{2\sqrt{ab}}u(\tau)+\frac{1}{2}v(\tau)\right]e^{\sqrt{ab}\tau}d\tau+c_1^0a\;e^{\sqrt{ab}t}+c_2^0a\;e^{-\sqrt{ab}t}=$$

$$=\int_0^t\left[-\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)}-e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2}u(\tau)+\frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)}+e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2}v(\tau)\right]d\tau+$$

$$+c_1^0a\;e^{\sqrt{ab}t}+c_2^0a\;e^{-\sqrt{ab}t}=$$

$$=\int_0^t\left[-\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{sh}\sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau)+\operatorname{ch}\sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau)\right]d\tau+c_1^0a\;e^{\sqrt{ab}t}+c_2^0a\;e^{-\sqrt{ab}t}.$$

Постоянные $c_1^0,\ c_2^0$ находятся из начальных условий системы (1):

$$\begin{cases}-c_1^0\sqrt{ab}+c_2^0\sqrt{ab}=x_0; & c_1^0=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_0}{a}-\dfrac{x_0}{\sqrt{ab}}\right);\\ c_1^0a+c_2^0a=y_0; & c_2^0=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_0}{\sqrt{ab}}+\dfrac{y_0}{a}\right).\end{cases}$$

Подставляя полученные значения $\mathbf{c_1^0}$, $\mathbf{c_2^0}$ в (4), получим:

$$\mathbf{x(t)=x_0 ch\sqrt{ab}t-y_0\sqrt{\frac{b}{a}}sh\sqrt{ab}t+\int\limits_0^t\left[ch\sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau)-\sqrt{\frac{b}{a}}sh\sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau)\right]d\tau};$$

$$\mathbf{y(t)=y_0 ch\sqrt{ab}t-x_0\sqrt{\frac{a}{b}}sh\sqrt{ab}t+\int\limits_0^t\left[-\sqrt{\frac{a}{b}}sh\sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau)+ch\sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau)\right]d\tau}. \qquad (5)$$

В частном случае, когда темпы пополнения сил постоянны, т.е. $\mathbf{u(t)\equiv u_0}$, $\mathbf{v(t)\equiv v_0}$, решение (5) примет вид:

$$\mathbf{x(t)=x_0 ch\sqrt{ab}t-y_0\sqrt{\frac{b}{a}}sh\sqrt{ab}t-\frac{u_0}{\sqrt{ab}}sh\sqrt{ab}(t-\tau)\Big|_0^t+\frac{v_0}{\sqrt{ab}}\sqrt{\frac{b}{a}}ch\sqrt{ab}(t-\tau)\Big|_0^t=}$$
$$\mathbf{=\left(x_0-\frac{v_0}{a}\right)ch\sqrt{ab}t-\frac{by_0-u_0}{\sqrt{ab}}sh\sqrt{ab}t+\frac{v_0}{a}}; \qquad (6)$$

$$\mathbf{y(t)=y_0 ch\sqrt{ab}t-x_0\sqrt{\frac{a}{b}}sh\sqrt{ab}t+\frac{u_0}{\sqrt{ab}}\sqrt{\frac{a}{b}}ch\sqrt{ab}(t-\tau)\Big|_0^t-\frac{v_0}{\sqrt{ab}}sh\sqrt{ab}(t-\tau)\Big|_0^t=}$$
$$\mathbf{=\left(y_0-\frac{u_0}{b}\right)ch\sqrt{ab}t-\frac{ax_0-v_0}{\sqrt{ab}}sh\sqrt{ab}t+\frac{u_0}{b}}. \qquad (7)$$

Перепишем соотношения (6) – (7) в виде:

$$\begin{cases}\mathbf{x(t)=\frac{1}{a\sqrt{b}}\left(p\cdot ch\sqrt{ab}t-g\cdot sh\sqrt{ab}t+v_0\sqrt{b}\right)}; \\ \mathbf{y(t)=\frac{1}{b\sqrt{a}}\left(g\cdot ch\sqrt{ab}t-p\cdot sh\sqrt{ab}t+u_0\sqrt{b}\right)}.\end{cases} \qquad (8)$$

где $\mathbf{p=\sqrt{b}\,(ax_0-v_0);\ g=\sqrt{a}\,(by_0-u_0)}$.

Для иллюстрации полученных в данном разделе соотношений рассмотрим следующий пример конфликтной ситуации между двумя группировками. В примере принято, что группировка **A** имеет 20, а группировка **B** – 10 боевых единиц. Ещё 5 боевых единиц группировки **B** находятся в резерве. Средняя скорострельность боевых единиц группировки **A** (с учётом переноса огня) равна $\boldsymbol{\alpha = 0.5}$ выстрелов в минуту, вероятность поражения боевых единиц противника: $\mathbf{p = 0.1}$. Боевые единицы группировки **B** обладают средней скорострельностью $\boldsymbol{\beta = 1}$ выстрелов в минуту и имеют вероятность поражения боевых единиц противоположной стороны: **Q = 0.08**. Выясним исход конфликтной ситуации, если 5 боевых единиц резерва стороны **B** могут быть переброшены к началу конфликтной ситуации.

Исходя из того, что численное соотношение сил к началу конфликтной ситуации равно

$$Q = \frac{x_0}{y_0} = \frac{20}{15} \approx 1.3,$$

а эффективные скорострельности сторон и их отношение равны

$$a = \alpha P = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05;\ b = \beta Q = 1 \cdot 0.08 = 0.08;\ \eta = \frac{a}{b} = \frac{0.05}{0.08} = 0.625,$$

определим коэффициент превосходства сторон

$$\mu = Q\sqrt{\eta} = 1.3 \cdot \sqrt{0.625} \approx 1.03.$$

Следовательно, силы группировок приблизительно равны.

Если силы резерва группировки **B** могут быть переброшены лишь через 10 минут после начала боя, то получим, используя соотношения (1) и (2):

$$x(t = 10) \approx 16; \quad y(t = 10) \approx 4 + 5 = 9.$$

При этом, $\mu = 16/9 \cdot \sqrt{0.625} \approx 1.4,$ и побеждающей стороной будет группировка **A**.

Интересно отметить, что если силы резерва перебрасываются через 6 минут после начала боя, бой опять выравнивается, т.к.

$$x(t = 6) \approx 16;\ y(t = 6) \approx 7 + 5 = 12;\ \mu = 16/12 \cdot \sqrt{0.625} \approx 1.05.$$

Рассмотренный метод решения задачи даёт возможность алгоритмизировать процесс моделирования конфликтных операций конфликтующих сторон.

Результаты решения уравнений системы (1) даёт возможность проанализировать процесс конфликтной ситуации в зависимости от темпа пополнения сил и обосновать соответствующие требования к темпу пополнения своей группировки для того, чтобы завершить конфликтную ситуацию разгромом противника в заданное время и могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления резерва по критерию минимума среднего количества средств стороны **B**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И., Ольшевский И.П., Носик Ал.М. Разработка моделей динамических процессов конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип. 3(9). – С. 52 - 54.*
2. *Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХВф «Транспорт України». – 2001. – Вип. 1(11). – С. 129 - 133.*
3. *Мороз Ф.В., Кембелл Д.Е. Методы исследования операций. – М: Сов. радио, 1965. – 286 с.*
4. *Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.*
5. *Основы теории управления войсками / Под ред. Алтухова П.К. - М.: Воениздат, 1984.- 297 с.*
6. *Давыдов Э.Г. Исследование операций: - М.: Высш. шк., 1990. – 459 с.*

Поступила 16.07.2002

КОНОНОВ Владимир Борисович, *канд. техн. наук, доцент, зам. нач. фак. ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*

КУШНЕРУК Юрий Ионович *– канд. техн. наук, доцент кафедры ХВУ. В 1971 году окончил ХГУ. Область научных интересов – исследование операций*

ЕВСТРАТ Дмитрий Иванович *– ст. преп. Харьковского гвардейского танкового института при ХНУ «ХПИ». В 1998 году окончил ХВУ. Область научных интересов – исследование операций.*