

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА В ХОДЕ ВСТРЕЧНОЙ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ ДВУХ ГРУППИРОВОК

к.т.н. В.Б. Кононов, к.т.н. Ю.И. Кушнерук, Д.И. Евстрат
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье излагается метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс управления распределением сил и средств оперирующих сторон в ходе конфликтной ситуации.

Рассмотрим конфликтную ситуацию между сторонами **B** и **A**, описываемую системой дифференциальных уравнений [1],

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -by(t) + u(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ax(t) + v(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени t ; $a = \alpha P$ и $b = \beta Q$ – эффективные скорострельности группировок **A** и **B**; α и β – средние скорострельности (число выстрелов в единицу времени) сторон **A** и **B**; P и Q – вероятности поражения одним выстрелом боевых средств сторон **A** и **B**; $u(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны **A**; $v(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны **B**; T – заданное время боя.

В рассматриваемой конфликтной ситуации ставится задача уничтожить как можно больше основных средств противодействующей стороны. При этом сторона **A** стремится выбрать свои управляющие параметры $u(t)$ таким образом, чтобы к концу конфликтной ситуации (в момент времени T), суммарное количество основных сил стороны **B** было минимально [2].

Используя соотношения (1) предлагаемый критерий представим как задачу управления распределением средств резерва в виде:

$$y(T) \rightarrow \min ;$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -by(t) + u(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -ax(t) + v(t); \end{aligned} \quad (2)$$

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0; \quad 0 \leq u(t) \leq c; \quad \int_0^T u(t) dt \leq A_0,$$

где c – ограничение, определяющее темпы поступления резерва; A_0 – ограничение, определяющее общее количество средств резерва.

Рассматриваемая задача оптимального управления представляет собой так называемую задачу Майера [3] с закрепленным временем и свободным правым концом.

Сначала найдём аналитическое решение системы дифференциальных уравнений задачи (2).

Составим характеристическое уравнение системы (1):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -b \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - ab = 0.$$

Оно имеет корни: $\lambda_1 = \sqrt{ab}$, $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$.

Представим решение однородной системы уравнений, соответствующей для (1) в виде:

$$\begin{aligned} \overline{x_1(t)} &= \gamma_{11} e^{\lambda_1(t)}, & \overline{y_1(t)} &= \gamma_{12} e^{\lambda_1(t)}; \\ \overline{x_2(t)} &= \gamma_{21} e^{\lambda_2(t)}, & \overline{y_2(t)} &= \gamma_{22} e^{\lambda_2(t)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где γ_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) определяются с точностью до множителя из однородной системы линейных уравнений. Решим данную систему уравнений для случая $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$. Получим следующие две системы уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} -\sqrt{ab}\gamma_{11} - b\gamma_{12} = 0; \\ -a\gamma_{11} - \sqrt{ab}\gamma_{12} = 0; \end{cases} & \quad 2) \begin{cases} -\sqrt{ab}\gamma_{21} - b\gamma_{22} = 0; \\ -a\gamma_{21} + \sqrt{ab}\gamma_{22} = 0; \end{cases} \\ \gamma_{11} = -\frac{\sqrt{ab}}{a}\gamma_{12}; & \quad \gamma_{21} = +\frac{\sqrt{ab}}{a}\gamma_{22}; \\ \gamma_{12} = a; \quad \gamma_{11} = -\sqrt{ab}; & \quad \gamma_{22} = a; \quad \gamma_{21} = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Характеристическому числу $\lambda_1 = \sqrt{ab}$ соответствует частное решение:

$$\overline{x_1(t)} = -\sqrt{ab} e^{\sqrt{ab}t}; \quad \overline{y_1(t)} = a e^{\sqrt{ab}t}.$$

Аналогично находим частное решение, соответствующее характе-

ристическому числу $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$:

$$\overline{x_2}(t) = \sqrt{abe}^{-\sqrt{abt}} ; \overline{y_2}(t) = ae^{-\sqrt{abt}} .$$

Общим решением однородной системы дифференциальных уравнений будет:

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &= -\sqrt{ab} \cdot c_1 e^{\sqrt{abt}} + \sqrt{ab} \cdot c_2 e^{-\sqrt{abt}} ; \\ \overline{y}(t) &= a \cdot c_1 e^{\sqrt{abt}} + a \cdot c_2 e^{-\sqrt{abt}} . \end{aligned}$$

Методом вариации произвольных постоянных построим общее решение неоднородной системы (1). Решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sqrt{ab} \cdot c_1(t) \cdot e^{\sqrt{abt}} + \sqrt{ab} \cdot c_2(t) \cdot e^{-\sqrt{abt}} ; \\ y(t) &= a \cdot c_1(t) \cdot e^{\sqrt{abt}} + a \cdot c_2(t) \cdot e^{-\sqrt{abt}} , \end{aligned}$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ – некоторые непрерывные дифференцируемые функции от t , определяемые из системы:

$$\begin{cases} -\sqrt{ab} \cdot c_1'(t) \cdot e^{\sqrt{abt}} + \sqrt{ab} \cdot c_2'(t) \cdot e^{-\sqrt{abt}} = u(t) ; \\ a \cdot c_1'(t) \cdot e^{\sqrt{abt}} + a \cdot c_2'(t) \cdot e^{-\sqrt{abt}} = v(t) . \end{cases}$$

Находим $c_1'(t)$ и $c_2'(t)$:

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= \left[-\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{-\sqrt{abt}} ; \\ c_2'(t) &= \left[\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{\sqrt{abt}} , \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int \left[-\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{-\sqrt{abt}} dt + c_1^0 ; \\ c_2(t) &= \int \left[\frac{1}{2\sqrt{ab}} u(t) + \frac{1}{2a} v(t) \right] \cdot e^{\sqrt{abt}} dt + c_2^0 . \end{aligned}$$

Окончательно, система (1) имеет решение следующего вида:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{\sqrt{abt}} \int_0^t \left[\frac{1}{2} u(\tau) - \frac{\sqrt{ab}}{2a} v(\tau) \right] e^{-\sqrt{ab}\tau} d\tau + \\
&+ e^{-\sqrt{abt}} \int_0^t \left[\frac{1}{2} u(\tau) + \frac{\sqrt{ab}}{2a} v(\tau) \right] e^{\sqrt{ab}\tau} d\tau - c_1^0 \sqrt{ab} e^{\sqrt{abt}} + c_2^0 \sqrt{ab} e^{-\sqrt{abt}} = \\
&= \int_0^t \left[\frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)} + e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2} u(\tau) - \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)} - e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2} v(\tau) \right] d\tau - \\
&\quad - c_1^0 \sqrt{ab} e^{\sqrt{abt}} + c_2^0 \sqrt{ab} e^{-\sqrt{abt}} = \tag{4} \\
&= \int_0^t \left[\operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau) u(\tau) - \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau) v(\tau) \right] d\tau - c_1^0 \sqrt{ab} e^{\sqrt{abt}} + c_2^0 \sqrt{ab} e^{-\sqrt{abt}} ; \\
y(t) &= e^{\sqrt{abt}} \int_0^t \left[-\frac{a}{2\sqrt{ab}} u(\tau) + \frac{1}{2} v(\tau) \right] e^{-\sqrt{ab}\tau} d\tau + \\
&+ e^{-\sqrt{abt}} \int_0^t \left[\frac{a}{2\sqrt{ab}} u(\tau) + \frac{1}{2} v(\tau) \right] e^{\sqrt{ab}\tau} d\tau + c_1^0 a e^{\sqrt{abt}} + c_2^0 a e^{-\sqrt{abt}} = \\
&= \int_0^t \left[-\sqrt{\frac{a}{b}} \frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)} - e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2} u(\tau) + \frac{e^{\sqrt{ab}(t-\tau)} + e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)}}{2} v(\tau) \right] d\tau + \\
&\quad + c_1^0 a e^{\sqrt{abt}} + c_2^0 a e^{-\sqrt{abt}} = \\
&= \int_0^t \left[-\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau) u(\tau) + \operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau) v(\tau) \right] d\tau + c_1^0 a e^{\sqrt{abt}} + c_2^0 a e^{-\sqrt{abt}} .
\end{aligned}$$

Постоянные c_1^0 , c_2^0 находятся из начальных условий системы (1):

$$\begin{cases} -c_1^0 \sqrt{ab} + c_2^0 \sqrt{ab} = x_0 ; & c_1^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{y_0}{a} - \frac{x_0}{\sqrt{ab}} \right) ; \\ c_1^0 a + c_2^0 a = y_0 ; & c_2^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{\sqrt{ab}} + \frac{y_0}{a} \right) . \end{cases}$$

Подставляя полученные значения c_1^0, c_2^0 в (4), получим:

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + \int_0^t \left[\operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau) - \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau) \right] d\tau; \quad (5)$$

$$y(t) = y_0 \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - x_0 \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + \int_0^t \left[-\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau) + \operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau) \right] d\tau.$$

В частном случае, когда темпы пополнения сил постоянны, т.е. $u(t) \equiv u_0, v(t) \equiv v_0$, решение (5) примет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t - \frac{u_0}{\sqrt{ab}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau) \Big|_0^t + \frac{v_0}{\sqrt{ab}} \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau) \Big|_0^t = \\ &= \left(x_0 - \frac{v_0}{a} \right) \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - \frac{by_0 - u_0}{\sqrt{ab}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + \frac{v_0}{a}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - x_0 \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + \frac{u_0}{\sqrt{ab}} \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau) \Big|_0^t - \frac{v_0}{\sqrt{ab}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau) \Big|_0^t = \\ &= \left(y_0 - \frac{u_0}{b} \right) \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - \frac{ax_0 - v_0}{\sqrt{ab}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + \frac{u_0}{b}. \end{aligned} \quad (7)$$

Перепишем соотношения (6) – (7) в виде:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{a\sqrt{b}} \left(p \cdot \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - g \cdot \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + v_0 \sqrt{b} \right); \\ y(t) = \frac{1}{b\sqrt{a}} \left(g \cdot \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - p \cdot \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + u_0 \sqrt{b} \right). \end{cases} \quad (8)$$

где $p = \sqrt{b} (ax_0 - v_0); g = \sqrt{a} (by_0 - u_0)$.

Для иллюстрации полученных в данном разделе соотношений рассмотрим следующий пример конфликтной ситуации между двумя группировками. В примере принято, что группировка **A** имеет 20, а группировка **B** – 10 боевых единиц. Ещё 5 боевых единиц группировки **B** находятся в резерве. Средняя скорострельность боевых единиц группировки **A** (с учётом переноса огня) равна $\alpha = 0.5$ выстрелов в минуту, вероятность поражения боевых единиц противника: $p = 0.1$. Боевые единицы группировки **B** обладают средней скорострельностью $\beta = 1$ выстрелов в минуту и имеют вероятность поражения боевых единиц противоположной стороны: $Q = 0.08$. Выясним исход конфликтной ситуации, если 5 боевых единиц резерва стороны **B** могут быть переброшены к началу конфликтной ситуации.

Исходя из того, что численное соотношение сил к началу конфликтной ситуации равно

$$Q = \frac{x_0}{y_0} = \frac{20}{15} \approx 1.3,$$

а эффективные скорострельности сторон и их отношение равны

$$a = \alpha P = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05; b = \beta Q = 1 \cdot 0.08 = 0.08; \eta = \frac{a}{b} = \frac{0.05}{0.08} = 0.625,$$

определим коэффициент превосходства сторон

$$\mu = Q\sqrt{\eta} = 1.3 \cdot \sqrt{0.625} \approx 1.03.$$

Следовательно, силы группировок приблизительно равны.

Если силы резерва группировки **B** могут быть переброшены лишь через 10 минут после начала боя, то получим, используя соотношения (1) и (2):

$$x(t=10) \approx 16; y(t=10) \approx 4 + 5 = 9.$$

При этом, $\mu = 16/9 \cdot \sqrt{0.625} \approx 1.4$, и побеждающей стороной будет группировка **A**.

Интересно отметить, что если силы резерва перебрасываются через 6 минут после начала боя, бой опять выравнивается, т.к.

$$x(t=6) \approx 16; y(t=6) \approx 7 + 5 = 12; \mu = 16/12 \cdot \sqrt{0.625} \approx 1.05.$$

Рассмотренный метод решения задачи даёт возможность алгоритмизировать процесс моделирования конфликтных операций конфликтующих сторон.

Результаты решения уравнений системы (1) даёт возможность проанализировать процесс конфликтной ситуации в зависимости от темпа пополнения сил и обосновать соответствующие требования к темпу пополнения своей группировки для того, чтобы завершить конфликтную ситуацию разгромом противника в заданное время и могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления резерва по критерию минимума среднего количества средств стороны **B**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И., Ольшевский И.П., Носик Ал.М. Разработка моделей динамических процессов конфликтных ситуаций // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вып. 3(9). – С. 52 - 54.
2. Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системы обработки информации. – Х.: ХВф «Транспорт України». – 2001. – Вып. 1(11). – С. 129 - 133.
3. Мороз Ф.В., Кембелл Д.Е. Методы исследования операций. – М.: Сов. радио, 1965. – 286 с.
4. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.
5. Основы теории управления войсками / Под ред. Алтухова П.К. - М.: Воениздат, 1984. - 297 с.
6. Давыдов Э.Г. Исследование операций: - М.: Высш. шк., 1990. – 459 с.

Поступила 16.07.2002

КОНОНОВ Владимир Борисович, канд. техн. наук, доцент, зам. нач. фак. ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.

КУШНЕРУК Юрий Ионович – канд. техн. наук, доцент кафедры ХВУ. В 1971 году окончил ХГУ. Область научных интересов – исследование операций

ЕВСТРАТ Дмитрий Иванович – ст. преп. Харьковского гвардейского танкового института при ХНУ «ХПИ». В 1998 году окончил ХВУ. Область научных интересов – исследование операций.
