УДК 623.021:005

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНФЛИКТУЮЩИХ СТРУКТУР

к.ф.-м.н. С.В. Гадецкая, к.т.н. В.Ю. Дубницкий
(представил д.т.н., проф. Е.А. Артеменко)

Приведены в явном виде решения уравнений типа уравнений Ланчестера, в которых правая часть есть произведение численностей сторон – участников конфликта.

Линейные дифференциальные уравнения, моделирующие взаимодействие конфликтующих структур, изучены достаточно подробно [1]. Их используют, как правило, при моделировании конфликтов, в которых участники используют свои ресурсы так, как это описано в [2].

Расширение областей использования малых групп, активизируемых в случайные моменты времени, привело к необходимости разработки математических моделей, учитывающих особенности взаимодействия конфликтующих структур такого вида [3].

В [4, 5] приведены соответствующие модели и выполнен их анализ методами качественной теории дифференциальных уравнений. В результате этого анализа были получены условия, обеспечивающие или преимущество одного из участников конфликта, или получение «ничейного результата». Под «ничейным результатом» понимается ситуация, при которой ни один из участников двустороннего конфликта не может получить преимущество только за счёт применения активных средств.

В указанных работах, однако, отсутствуют в явном виде зависимости для определения численности конфликтующих структур.

Целью настоящей работы является решение в явном виде систем дифференциальных уравнений, моделирующих различные варианты взаимодействия участников конфликта.

Рассмотрим два варианта взаимодействия оперирующей стороны **X** и стороны **Y**.

Вариант А. Стороны **X** и **Y** используют в процессе конфликта малые группы, рассеянные случайным образом и взаимодействующие только в результате столкновений.

Вариант Б. Сторона **X** располагает свои элементы регулярным образом, описанным в [2], сторона **Y** действует малыми группами так, как это описано в [3].

Рассмотрим *вариант А*. Система уравнений, соответствующая этому случаю, согласно [5] имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k\lambda\, xy; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda\, xy \end{cases} \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$x(0) = 1; \quad y(0) = u, \quad u > 0. \qquad (2)$$

Коэффициент $k > 0$ показывает, во сколько раз эффективность средств стороны **Y** отличается от эффективности средств стороны **X**.

Подобный подход, ранее применённый в работе [6], позволяет проводить все вычисления в относительных величинах, нормированных по основным параметрам стороны **X**.

Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{dx}{dy} = k. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$x = ky + C. \qquad (4)$$

Используя начальные условия (2) и выражение (4), найдем, что

$$C = 1 - ku. \qquad (5)$$

Тогда

$$x = 1 + k(y - u).$$

Подставляя (4) в (1), получим

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y(ky + C),$$

откуда следует, что

$$-\frac{1}{C}\, ln\left|\frac{ky + C}{y}\right| = -\lambda_1 t + ln D, \text{ т.е. } \left(\frac{ky + C}{y}\right)^{1/C} = \frac{e^{\lambda t}}{D}.$$

Приняв, что $D^{-C} = G$, имеем:

$$y = C\left(Ge^{C\lambda_1 t} - k\right)^{-1}.$$

Используя начальные условия, найдем, что

$$G = C/u + k.$$

Следовательно, с учётом условия (5), получим в явном виде решение системы (1):

$$y = (1 - ku)\cdot\left(u^{-1}e^{\lambda t(1-ku)} - k\right)^{-1}; \qquad (6)$$

$$x = 1 - ku + k(1 - ku)\cdot\left(u^{-1}e^{\lambda_1 t(1-ku)} - k\right)^{-1}. \qquad (7)$$

Рассмотрим *вариант Б*. Для этого случая система уравнений взаимодействия сторон примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k\lambda\, y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda\, xy \end{cases} \qquad (8)$$

при начальных условиях (2).

Найдем первый интеграл системы (8). Для этого первое уравнение системы (8) разделим на второе и полученный результат проинтегрируем

$$C = x^2/2 - ky .$$

Из начальных условий (2) найдем, что

$$C = 1/2 - ku . \qquad (9)$$

В работе [5] доказано, что при **C = 0** ни одна из сторон не имеет преимущества. В нашем случае это приведёт к равенству вида

$$1/2 = ku . \qquad (10)$$

При **C = 0** с учетом (9) первое уравнение системы (8) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \left(C - \frac{x^2}{2} \right) \lambda . \qquad (11)$$

Откуда при **C = 0** получим, что

$$x = 2/(\lambda t + 2). \qquad (12)$$

Далее, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2\lambda}{\lambda t + 2} y$, или

$$y = \frac{4u}{(\lambda t + 2)^2} . \qquad (13)$$

Сравнивая (12) и (13), получим условия «ничейного результата»

$$y = ux^2 . \qquad (14)$$

Отсюда следует, что если по данным стороны **X** потери стороны **Y** пропорциональны квадрату собственных потерь стороны **X**, то получение преимущества в конфликте со стороной **Y** только с применением активных средств невозможно.

Решение *варианта Б* при условии $C > 0$ получим следующим образом.

Первый интеграл системы (8), согласно [5], имеет вид

$$\frac{dx}{C - \lambda x^2/2} = dt . \qquad (15)$$

Тогда, интегрируя (15), получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda C}}\, ln \left| \frac{\sqrt{2C} + x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2C} - x\sqrt{\lambda}} \right| + C_1 = t .$$

Используя начальные условия (2), найдем, что

$$ln\left|\frac{\sqrt{2C}+x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2C}-x\sqrt{\lambda}}\right| = ln \quad \left|\frac{\sqrt{2C}+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2C}-\sqrt{\lambda}}\right| + \sqrt{2\lambda C}\ .$$

В результате дальнейших преобразований найдем в явном виде выражения для **x** и **y** при условии, что **C** соответствует равенству (5):

$$x = \sqrt{\frac{2C}{\lambda}} \cdot \frac{\left(\sqrt{2C}+\sqrt{\lambda}\right)e^{t\sqrt{2C\lambda}} + \sqrt{\lambda} - \sqrt{2C}}{\left(\sqrt{2C}+\sqrt{\lambda}\right)e^{t\sqrt{2C\lambda}} + \sqrt{2C} - \sqrt{\lambda}}\ ; \qquad (16)$$

$$y = \frac{2\sqrt{2C}\cdot u\, e^{t\sqrt{2C\lambda}}}{\left(\sqrt{2C}+\sqrt{\lambda}\right)e^{t\sqrt{2C\lambda}} + \sqrt{2C} - \sqrt{\lambda}} \qquad (17)$$

В [5] отмечено, что при $C > 0$ победу одержит сторона **X**, т.е. при всех $t > 0$ выполняется условие $x(t) > y(t)$. Однако, согласно [7], следует считать, что в действительности поражение потерпит та сторона, которая первой достигнет неприемлемого для себя уровня потерь.

Выводы. 1. В явном виде получены выражения для изменения численности сторон при условии, когда конфликтующие стороны взаимодействуют в результате соприкосновения малых групп, рассеянных в некоторой области.

2. Получено условие равновесия, при котором ни одна из конфликтующих сторон не одержит преимущество над другой только за счет применения активных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванилов В.Ю., Огарышев В.Ф., Павловский Ю.Н. Имитация конфликтов. – ВЦ РАН, 1993. – 204 с.*
2. *Тактика в боевых примерах: Батальон. – М.: ВИМО СССР, 1958. – 236 с.*
3. *Курочкин В.И. О целях и критериях эффективности применения вооруженных сил в противопартизанской войне // Военная мысль. – 2002. – № 1. – С. 64 - 65.*
4. *Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука. Физмат, 1987. – 160 с.*
5. *Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Наука. Физмат, 1997. – 320 с.*
6. *Дубницкий В.Ю. Решение дифференциальных уравнений моделей соперничества // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип. 2(8). – С. 63 - 68.*
7. *Павловский Ю.Н. О факторе Л.Н. Толстого в вооруженной борьбе // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, № 1. – С. 5 - 15.*

Поступила 8.08.2002

ГАДЕЦКАЯ Светлана Викторовна*, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики и информ. технологий Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1986 году окончила ХГУ. Область научных интересов – дифференциальные уравнения.*

ДУБНИЦКИЙ Валерий Юрьевич*, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики и информ. технологий Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1975 году окончил ХИРЭ. Область научных интересов – исследование операций.*