

## ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОПТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН

д.т.н., проф. Ю.Г. Даник, М.В. Маляров, В.В. Баранов, М.Ю. Пакшин

*На основе анализа статистических и фрактальных свойств морской поверхности предложена фрактальная модель морской подстилающей поверхности, которая учитывает природные свойства.*

Широкое развитие некоторых областей математики привело к появлению методов обнаружения, основанных на новых физических принципах. Одним из таких методов стал метод фрактального обнаружения объектов [1, 2], основанный на анализе фрактальных свойств природных поверхностей. И если методики и алгоритмы фрактального обнаружения описаны достаточно широко, описанию математической модели подстилающей поверхности до настоящего времени уделялось недостаточно внимания. В данной работе делается попытка предложить фрактальную модель одной из широко распространенных природных структур – морской поверхности. Для начала рассмотрим статистические свойства морской поверхности.

Исследования, показывающие, что морская поверхность обладает фрактальными свойствами, встречаются в литературе довольно часто [3]. В последние годы, вместе с широким применением фрактальной теории, проведено много исследований фрактальной структуры различных поверхностей. Так в [3, 4] были проанализированы шероховатости различных поверхностей, принадлежащих естественным и искусственным природным объектам.

Все эти исследования выявили подобия в структуре таких поверхностей в различных масштабах, что в целом подтверждает выдвинутую в [3] гипотезу о существовании общей природной закономерности, лежащей в основе этого явления.

Любая природная фрактальная поверхность определяется своим пространственным спектром  $G(f)$  в виде

$$G(f) = L_0 / f^{-\alpha}. \quad (1)$$

Величину  $L_0$  называют топотезой поверхности. Значения  $L_0$  однозначно определяют статистические и геометрические свойства поверхности для рассматриваемого диапазона пространственных волн. Спектральный параметр  $\alpha$  для 3-х мерного пространства определяется через выражение

$$\alpha = 7 - 2D, \quad (2)$$

устанавливая связь с главной характеристикой фрактальных поверхностей – фрактальной размерностью  $D$ .

Необходимо отметить, что численные значения топотезы  $L_0$  и спектрального параметра  $\alpha$  для каждого конкретного типа поверхности вычисляются после проведения экспериментальных исследований и набора большой выборки измерений.

Исследования, проведённые в [4], показывают, что для гравитационных волн, одним из примеров которых является морская поверхность, спектральный параметр  $\alpha$  принимает следующие значения:  $\alpha_1 = 11/3$ ,  $\alpha_2 = 7/3$ ,  $\alpha_3 = 5/2$ ,  $\alpha_4 = 4$ , при длине морской волны  $l = 0,1, \dots, 0,35$  м.

Используя формулу (2) легко определить фрактальную размерность непосредственно морской поверхности (или её сечений). Результаты

Таблица 1  
Фрактальная размерность морской поверхности

Значения коэффци. $\alpha$	Значение фрактальной размерности	
	Поверхности	Сечения поверхности
11/3	—	1,666
4	—	1,333
7/3	2,333	—
5/2	2,25	—

расчёта представлены в табл. 1. При создании модели морской поверхности (или ее сечений) моделирование необходимо проводить таким образом, чтобы её фрактальная размерность не противоречила

значениям, приведенным в табл. 1.

Один из способов построения фрактальной поверхности состоит в параллельном переносе фрактальной кривой на расстояние  $h$  вдоль направления перпендикулярного её плоскости. В [3] показано, что при таком построении результирующая фрактальная размерность плоскости  $D$  равна

$$D = 1 + D_f, \quad (3)$$

где  $D_f$  – фрактальная размерность сечения.

Подобным образом можно построить фрактальные поверхности любой размерности в пределах от 2 до 3. Преимуществами такого способа построения фрактальных поверхностей является небольшое количество вычислительных затрат, они сводятся к моделированию только сечения фрактальной поверхности. Также заранее возможно определить результирующую фрактальную размерность  $D_f$  смоделированной поверхности.

Далее рассмотрим рассеяние оптических волн на фрактальных природных поверхностях. Рассеивание оптических волн природными объектами имеет ряд особенностей по сравнению с рассеиванием радиоволн и эффектами геометрической оптики. Главное отличие состоит в том, что в оптическом диапазоне волн неровности объекта значительно превышают длину волны. Кроме того, в оптическом диапазоне волн размеры неровностей объекта сравнимы с длиной волны. Поэтому при описании рассеивающей поверхности можно воспользоваться понятиями диффузного отражения.

Представим сечение морской поверхности  $\Sigma(\mathbf{x})$  в виде [5]:

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где гладкая функция  $\Omega(\mathbf{x})$  описывает форму объекта (или макроструктуру поверхности), а функция  $\xi(\mathbf{x})$  описывает отклонения гладкой функции  $\Omega(\mathbf{x})$  от реальной  $\Sigma(\mathbf{x})$  за счёт шероховатостей и описывает микроструктуру рассеивающей поверхности.

Морская поверхность является сложным образованием, на котором наблюдается ветровое волнение, острые гребни, обрушивающиеся волны и так далее, при этом каждое образование участвует в формировании рассеянного сигнала. Опишем спокойную морскую поверхность в виде

$$\Omega(\mathbf{x}) = A \sin(\mathbf{w}_0 \mathbf{x}), \quad (5)$$

где  $A$  – амплитуда морской волны, а  $\mathbf{w}_0$  – частота, связанная с длиной волны зависимостью  $\mathbf{w}_0 = 2\pi/l$ .

Под действием ветра над морской поверхностью происходит случайный разброс амплитуд волн. В [6] показано, что разброс амплитуд подчиняется нормальному случайному закону со среднеквадратичной высотой волн  $\sigma$ . При росте скорости ветра над морской поверхностью наблюдается небольшой рост среднеквадратичной высоты, а после достижения определенного значения скорости наблюдается очень интенсивный рост. Скорость ветра  $V_c$ , при которой происходит это изменение, называется критической. Зависимость среднеквадратичной высоты волн хорошо описывается функцией вида

$$\sigma = A((V - V_c)/V_c)^2. \quad (6)$$

С дальнейшим ростом скорости ветра происходит увеличение высоты волны. И внешний вид, и форма начинают изменяться, появляются горизонтальная и вертикальная асимметрия волны, определяемая коэффициентами горизонтальной  $\mu$  и вертикальной  $\lambda$  асимметрии, равными

$$\mu = A/H; \quad \lambda = F_2 / F_1. \quad (7)$$

В приведённом выражении  $A$  – амплитуда волны,  $H$  – максимальный размах,  $F_1$  и  $F_2$  – расстояния от нулевого значения волны до максимума и от максимума до нулевого значения соответственно (рис. 1).

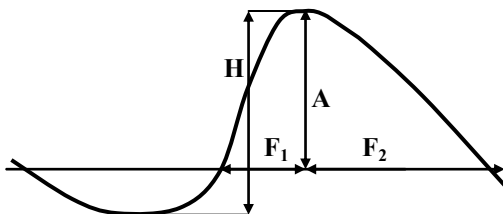


Рис. 1. Асимметрия морской волны

Численные значения коэффициентов [6] приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения коэффициентов асимметрии

Коэффициенты асимметрии	Симметричная волна	Значения коэффициентов асимметрии		
		Минимальное	Максимальное	Среднее
$\mu$	0,5	0,63	0,93	0,76
$\lambda$	1,0	0,9	2,70	1,85

Таким образом, частоту морской волны с учетом (7) перепишем в виде:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0 + (\lambda - 1) \cdot |\sin(\mathbf{w}_0 \mathbf{x})|, \quad (8)$$

а амплитуду изменения высот волн с учётом (6) и (7) представим в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + (\mu - 0.5) \sin(\mathbf{w}(\mathbf{x}) \mathbf{x}). \quad (9)$$

Поэтому, исходя из формул (5), (8), (9) макроструктура поверхности определяется выражением

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \sin(\mathbf{w}(\mathbf{x}) \mathbf{x}). \quad (10)$$

Перейдем к описанию микронеровностей поверхности. Так как микронеровности учитывают фрактальные свойства природных поверхностей, то для их описания необходимо воспользоваться фрактальными функциями.

Одной из таких функций является фрактальная функция Вейерштрасса-Мандельброта  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  [3], определяемая выражением:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \exp(i\mathbf{b}^n \mathbf{x})) \exp(i\phi)}{\mathbf{b}^{(2-D)n}}. \quad (11)$$

В выражении (11)  $\phi$  определяет начальную фазу, причём выбор каждой другой фазы соответствует новой функции Вейерштрасса-Мандельброта. Параметр  $\mathbf{b}$  является масштабным коэффициентом и определяет, какая часть кривой видна, когда аргумент  $\mathbf{x}$  изменяется в заданном интервале. Значение  $\mathbf{b}$  может выбираться любым в интервале значений 0,8...1,8. Параметр  $\mathbf{D}$  определяет фрактальную размерность кривой Вейерштрасса-Мандельброта и может принимать значения в диапазоне  $1 < \mathbf{D} < 2$ . Поэтому для описания морской поверхности значения фрактальной размерности должны соответствовать фрактальной размерности морской поверхности (табл. 1).

Простая разновидность кривой Вейерштрасса - Мандельброта получится, если положить  $\phi = 0$ . Такая разновидность фрактальной кривой называется косинусной фрактальной кривой и описывается выражением вида

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \text{Re}(\mathbf{W}(\mathbf{x})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\mathbf{b}^n \mathbf{x}))}{\mathbf{b}^{(2-D)n}}. \quad (12)$$

Применение для моделирования косинусной функции Вейерштрасса-Мандельброта позволяет значительно упростить вычисление её значений и отказаться от комплексных чисел.

При малых  $\mathbf{D}$  функция почти гладкая, но когда  $\mathbf{D}$  возрастает до двух, начинает сильно флуктуировать. Эти флуктуации накладываются на общий тренд к возрастанию. Функция  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  однородна и обладает самоподобием

$$\mathbf{C}(\mathbf{b}\mathbf{x}) = \mathbf{b}^{2-D} \mathbf{C}(\mathbf{x}). \quad (13)$$

В [3] показано, что для моделирования микронеровностей легче всего описывается на языке обобщенного броуновского движения вида

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{H} + 0.5)} \sum_{i=-\infty}^{n\mathbf{x}} \left( \mathbf{x} - \frac{i}{n} \right)^{\mathbf{H}-0.5} n^{-0.5} \zeta_i. \quad (14)$$

В приведенном выражении  $\Gamma(\bullet)$  – это гамма функция,  $\mathbf{H}$  – показатель Хер-

ста, связанный с фрактальной размерностью соотношением  $D = 2 - H$ . Значение  $\zeta_i$  – дискретный набор случайных гауссовых чисел с нулевым средним и дисперсией, равной единице. Значения  $\mathbf{n}$  могут находиться в пределах  $5 \div 10$ .

Как и фрактальная функция Вейерштрасса-Мандельброта, обобщённое броуновское движение обладает самоподобием

$$\mathbf{B}(\mathbf{b}\mathbf{x}) = \mathbf{b}^{0.5}\mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Таким образом, микроструктура морской поверхности описывается с помощью фрактальных функций в виде

$$\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{k}\mathbf{C}(\mathbf{x}), \quad \xi(\mathbf{x}) = \mathbf{k}\mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (16)$$

где  $\mathbf{k}$  – масштабные коэффициенты.

Для уменьшения вычислительных затрат и облегчения моделирования значения сечения морской поверхности можно посчитать на  $[0 \dots 2\pi]$  и далее параллельным переносом продолжить на весь интервал значений.

Таким образом, подставляя выражения (10) и (16) в (4), получим модель сечения морской поверхности с заданной фрактальной размерностью. Осуществляя параллельный перенос сечения, получим модель морской поверхности. Применение данной модели позволит проанализировать изменение фрактальной размерности в зависимости от природных условий (высот волн и скорости ветра), а также проанализировать основные показатели качества фрактального обнаружения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Даник Ю.Г. Фрактальное обнаружение объектов // Сб. научн. тр. ХВУ. – Х.: ХВУ. – 1998. – Вып. 4 (26) – С. 31 - 34.
2. Потапов А.А., Герман В.А. Применение фрактальных методов для обработки оптических и радиолокационных изображений земной поверхности // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 8. – С. 57 - 64.
3. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1981. – 254 с.
4. Потапов А.А. Фракталы в дистанционном зондировании // Успехи современной радиоэлектроники. – 2000. – № 6. – С. 3 - 65.
5. Москвитин С.В., Стрелков А.И. Теоретические основы оптической локации. – Х.: ВИРТА, 1992, – 369 с.
6. Кулемин Г.П., Особенности обратного рассеивания радиоволн СВЧ морской поверхностью при очень малых углах скольжения // Успехи современной радиоэлектроники. – 1998. – № 12. – С. 17 - 39.

Поступила 15.08.2002

**ДАНИК Юрий Григорьевич**, доктор техн. наук профессор, ведущий научный сотрудник научного центра при ХВУ. В 2002 году окончил факультет подготовки командно-штабного и руководящего инженерного состава ХВУ. Область научных интересов – хаос в динамических системах, теория фракталов.

**МАЛЯРОВ Мурат Всеволодович**, адъюнкт ХВУ. В 1997 году окончил ХВУ. Область научных интересов – применение фракталов в обработке изображений, программирование.

**БАРАНОВ Вадим Владимирович**, слушатель ХВУ. В 1997 году окончил ХВУ. Область научных интересов – программирование.

**ПАКШИН Максим Юрьевич**, инженер сектора Центра приёма и обработки служебной

*информации и контроля навигационного поля. В 2002 году окончил факультет подготовки командно-штабного и руководящего инженерного состава ХВУ. Область научных интересов – программирование, методы обработки изображений.*