УДК 519.6:514.1

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{I_s^n R}$

к.ф.-м.н. И.В. Гребенник , к.ф.-м.н. Л.Г. Евсеева, к.ф.-м.н. Т.Е. Романова
(представил д.т.н. Н.И. Гиль)

Вводится понятие интервального выпуклого множества в интервальном пространстве $\mathbf{I_s^n R}$. *В этом пространстве определяются интервальная выпуклая оболочка точечного интервального множества и интервальный выпуклый многогранник, рассматриваются некоторые их свойства.*

Применение теории интервального анализа [1 – 4] при моделировании и решении задач геометрического проектирования с учётом погрешностей исходных данных представляет интерес в оптимизационных, в том числе комбинаторных моделях и методах [5, 6].

В основе моделей и методов евклидовой комбинаторной оптимизации лежит понятие комбинаторного многогранника [5, 6], вершины которого формируют область допустимых решений комбинаторной задачи. Построение и использование комбинаторных многогранников в задачах оптимизации в евклидовом пространстве подробно исследованы (например, [5, 6]).

Однако, в данных моделях и методах погрешности параметров непосредственно не учитываются. Математические модели оптимизационных задач геометрического проектирования с учётом погрешностей исходных данных описаны в ряде работ [7 – 9].

Для построения адекватных математических моделей и разработки эффективных методов решения оптимизационных задач геометрического проектирования с учётом погрешностей исходных данных представляет интерес описание комбинаторных многогранников в интервальном пространстве $\mathbf{I_s^n R}$ [4]. С этой целью необходимо ввести ряд понятий.

Рассмотрим $Z=\left(\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \ldots, \langle X_n\rangle\right)\in \mathbf{I_s^n R}$ – элемент n-мерного интервального пространства $\mathbf{I_s^n R}$, $\langle X_i\rangle=\langle x_i, \nu_{x_i}\rangle\in \mathbf{I_s R}$, $i\in J_n$, $\mathbf{I_s^n R}=\underbrace{\mathbf{I_s R}\times\mathbf{I_s R}\times\ldots\times\mathbf{I_s R}}_{n}$, где $\mathbf{I_s R}$ – расширенное пространство центрированных интервалов [1 – 3].

Пусть $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m \in \mathbf{I_s^n R}$. Пользуясь операциями сложения и умножения элемента на действительное число, введёнными в пространстве

$\mathbf{I_s^n R}$ [4], дадим следующие определения.

Определение 1. Точка $Z = \left(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle \right) \in \mathbf{I_s^n R}$ называется комбинацией точек $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, если существуют такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, что $Z = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i Z_i$.

Отметим, что пространство $\mathbf{I_s R}$ не является линейным [2, 3], поскольку

$$\lambda \langle X_i \rangle = \langle \lambda x_i, \left| \lambda \right| \nu_{x_i} \rangle, \ \ \forall \langle X_i \rangle \in \mathbf{I_s R}.$$

Определение 2. Комбинация точек $Z_1, Z_2, \dots, Z_m \in \mathbf{I_s^n R}$ называется линейной, если $\lambda_i \geq 0$, $i \in J_m = \left\{ 1, 2, \dots, m \right\}$.

Определение 3. Комбинация точек $Z_1, Z_2, \dots, Z_m \in \mathbf{I_s^n R}$ называется выпуклой, если коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Пусть $Z = \left(\langle x_1, \nu_{x_1} \rangle, \langle x_2, \nu_{x_2} \rangle, \dots, \langle x_n, \nu_{x_n} \rangle \right) \in \mathbf{I_s^n R}$ – произвольная точка. В пространстве $\mathbf{I_s^n R}$ введены отображения $p_n(Z)$: $\mathbf{I_s^n R} \to R^n$ и $r_n(Z)$: $\mathbf{I_s^n R} \to R^n$ [4], такие, что:

$$p_n(Z) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n; \quad r_n(Z) = (\nu_{x_1}, \nu_{x_2}, \dots, \nu_{x_n}) \in R^n.$$

Используя эти отображения, дадим определение выпуклого множества в пространстве $\mathbf{I_s^n R}$.

Определение 4. Множество $\mathbf{G} \subset \mathbf{I_s^n R}$ называется выпуклым, если в пространстве R^n выпуклыми являются множества:

$$G_x = \{ x \mid x \in R^n, \quad x = p_n(Z), \quad \forall Z \in \mathbf{G} \}; \tag{1}$$

$$G_y = \{ y \mid y \in R^n, \quad y = r_n(Z), \quad \forall Z \in \mathbf{G} \}. \tag{2}$$

Таким образом, в основе сформулированного понятия выпуклости множества в $\mathbf{I_s^n R}$ лежит выпуклость его образов G_x и G_y в евклидовом пространстве R^n. В связи с этим, для выпуклых в $\mathbf{I_s^n R}$ множеств справедливы многие свойства выпуклых в R^n множеств [10]. Отметим некоторые из них.

Теорема 1. Множество $\mathbf{G} \subset \mathbf{I_s^n R}$ выпукло тогда и только тогда, когда оно содержит все выпуклые комбинации любого конечного числа своих точек.

Доказательство следует из справедливости соответствующего утверждения для множеств G_x и G_y в R^n.

Рассмотрим вопрос о выпуклости пересечения выпуклых множеств в $\mathbf{I_s^n R}$. При этом операцию пересечения множеств в $\mathbf{I_s^n R}$ будем рассматривать в классическом теоретико-множественном виде. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{G}_i$, $i \in J_N$, (J_N – конечное или бесконечное множество) – выпуклые в $\mathbf{I_s^n R}$ множества. Тогда пересечение $\mathbf{G} = \bigcap_i \mathbf{G}_i$ выпукло в $\mathbf{I_s^n R}$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{G}_i$ выпуклы в $\mathbf{I_s^n R}$, то для каждого из них множества G_{x_i} и G_{y_i} выпуклы в R^n. Пусть $X, Y \in \mathbf{G}$. Тогда, по определению пересечения множеств X, Y принадлежат каждому из $\mathbf{G}_i$, $i \in J_N$. В силу выпуклости в $\mathbf{I_s^n R}$ множеств $\mathbf{G}_i$, для любого из них выполняются соотношения:

$$u = \lambda p_n\left(X\right) + (1-\lambda) p_n\left(Y\right) \in G_{x_i};\; w = \lambda r_n\left(X\right) + (1-\lambda) r_n\left(Y\right) \in G_{y_i};\; 0 \le \lambda \le 1.$$

Это означает, что $u \in G_x$ и $w \in G_y$, т.е. множества G_x и G_y выпуклы в R^n. Из этого следует, что множество $\mathbf{G}$ выпукло в $\mathbf{I_s^n R}$.

Определение 5. Пересечение всех выпуклых в $\mathbf{I_s^n R}$ множеств, содержащих множество $\mathbf{G} \subset \mathbf{I_s^n R}$, называется интервальной выпуклой оболочкой множества $\mathbf{G}$.

Выпуклую интервальную оболочку множества $\mathbf{G}$ в $\mathbf{I_s^n R}$ обозначим $ico\,\mathbf{G}$.

Теорема 3. Пусть $\bar{\mathbf{G}} \subset \mathbf{I_s^n R}$ – произвольное множество, а $\mathbf{G} = ico\,\bar{\mathbf{G}}$ – его интервальная выпуклая оболочка. Тогда множества G_x и G_y вида (1) и (2), порождённые множеством $\mathbf{G}$, являются выпуклыми оболочками в R^n соответственно множеств $\bar{G}_x$ и $\bar{G}_y$, порождённых множеством $\bar{\mathbf{G}}$.

Доказательство. Пусть $\bar{\mathbf{G}} \subset \mathbf{I_s^n R}$, а $\mathbf{G^i}$, $i \in D$, где D – множество произвольной мощности, – выпуклые в $\mathbf{I_s^n R}$ множества, такие что $\bar{\mathbf{G}} \subseteq \mathbf{G^i}$, $\forall i \in D$. Согласно определению 4, множества G_x^i и G_y^i вида (1) и (2), порождаемые множеством $\mathbf{G^i}$, выпуклы в R^n, причём для всех i справедливы соотношения

$$\bar{G}_x \subseteq G_x^i,\;\; \bar{G}_y \subseteq G_y^i. \qquad (3)$$

Рассмотрим множества:

$$\mathbf{G} = \bigcap_{i \in D} \mathbf{G}^{\mathbf{i}} ; \quad (4)$$

$$\tilde{G}_x = \bigcap_{i \in D} G_x^i ; \quad (5)$$

$$\tilde{G}_y = \bigcap_{i \in D} G_y^i . \quad (6)$$

По определению, $\mathbf{G} = ico\ \overline{\mathbf{G}}$, а множества $\tilde{G}_x$ и $\tilde{G}_y$ выпуклы в R^n. Покажем, что $\tilde{G}_x = G_x$, где G_x – множество вида (1), порожденное выпуклым в $\mathbf{I_s^n R}$ множеством $\mathbf{G}$. Пусть $Z \in \mathbf{G^i}$, $i \in D$. Тогда $X = p_n(Z) \in G_x^i \quad \forall i \in D$ и, следовательно, $X \in \tilde{G}_x$. С другой стороны, $Z \in \mathbf{G}$ согласно (4), поэтому $X = p_n(Z) \in G_x$. Следовательно, $\left(X \in \tilde{G}_x \right) \Leftrightarrow \left(X \in G_x \right)$, т.е. $\tilde{G}_x = G_x$. Аналогично показывается, что $\tilde{G}_y = G_y$.

В соответствии с (3 – 5) множества $\tilde{G}_x$ и $\tilde{G}_y$, принадлежащие R^n, представляют собой выпуклые оболочки соответственно множеств $\overline{G}_x$ и $\overline{G}_y$. Множества G_x и G_y в R^n порождены множеством $\mathbf{G} = ico\ \overline{\mathbf{G}}$. Совпадение множеств $\tilde{G}_x = G_x$ и $\tilde{G}_y = G_y$ приводит к справедливости утверждения теоремы.

Теорема 4. Интервальная выпуклая оболочка множества $\mathbf{G} \subset \mathbf{I_s^n R}$ состоит из тех и только тех точек, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа точек из $\mathbf{G}$.

Доказательство этого утверждения следует из справедливости соответствующего утверждения для множеств G_x, G_y в пространстве R^n.

Рассмотрим выпуклую интервальную оболочку множества $\overline{\mathbf{G}} = \{Z_1, Z_2\} \subset \mathbf{I_s^n R}$ – множество $\mathbf{G} = ico\ \overline{\mathbf{G}} \subset \mathbf{I_s^n R}$; здесь

$$Z_j = \left(\langle x_1, \nu_{x_1} \rangle, \langle x_2, \nu_{x_2} \rangle, \dots, \langle x_n, \nu_{x_n} \rangle \right), \; j \in J_n .$$

Множество $\mathbf{G} = ico\ \overline{\mathbf{G}}$ представляет собой такое множество, для которого G_x и G_y являются отрезками в R^n с границами $(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_n(Z_1)$; $(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_n(Z_2)$ и $(\nu_{x_1}, \nu_{x_2}, \dots, \nu_{x_n}) = r_n(Z_1)$; $(\nu_{y_1}, \nu_{y_2}, \dots, \nu_{y_n}) = r_n(Z_2)$ соответственно.

Определение 6. Интервальная выпуклая оболочка множества точек $Z_0, Z_1, \dots, Z_m \in \mathbf{I_s^n R}$, таких, что системы векторов

$$\{p_n(Z_i)-p_n(Z_0),\quad i\in J_m\} \text{ и } \{r_n(Z_i)-r_n(Z_0),\quad i\in J_m\}$$

в R^n линейно независимы, называется интервальным симплексом, натянутым на точки $Z_0, Z_1, \dots, Z_m$, и обозначается $S_m(Z_0, Z_1, \dots, Z_m)$. Точки $Z_0, Z_1, \dots, Z_m$ называются вершинами интервального симплекса.

В случае если $m=n$, интервальный симплекс называется стандартным n-мерным интервальным симплексом.

Согласно теореме 3, интервальный симплекс можно представить так:

$$S_m=\{Z:\ \ Z=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i Z_i,\quad \lambda_i\ge 0,\quad i=0,1,2,\dots,m,\quad \sum_{i=0}^{m}\lambda_i=1\}.$$

Определение 7. Интервальная выпуклая оболочка множества точек $Z_1, \dots, Z_m\in\mathbf{I_s^nR}$, где m – конечно, называется интервальным выпуклым многогранником, натянутым на эти точки.

Следует заметить, что определение интервального выпуклого многоугольника введено в работе [11] на основе понятий интервальной прямой и интервальных неравенств [12].

Рассмотрим элементы $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ пространства $\mathbf{I_s^nR}$ и порождаемый ими многогранник $\mathbf{T}\left(Z_1, Z_2, \dots, Z_m\right)=ico\left\{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\right\}$. Выпуклое в $\mathbf{I_s^nR}$ множество $\mathbf{T}\left(Z_1, Z_2, \dots, Z_m\right)$ порождает выпуклые в R^n множества $\mathbf{T}_x$ и $\mathbf{T}_y$ вида (1) и (2). В соответствии с теоремой 3 множества $\mathbf{T}_x$ и $\mathbf{T}_y$ представляют собой выпуклые оболочки множеств $\left\{X_1, X_2, \dots, X_m\right\}\subset R^n$ и $\left\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\right\}\subset R^n$, где $X_i=p_n(Z_i)$, $Y_i=r_n(Z_i)$, $i\in J_m$. Следуя [10], $\mathbf{T}_x$ и $\mathbf{T}_y$ представляют собой выпуклые многогранники в R^n, порождённые множествами $\left\{X_1, X_2, \dots, X_m\right\}$ и $\left\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\right\}$ соответственно.

Пусть $Z_1, Z_2, \dots, Z_m\in\mathbf{I_s^nR}$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – действительные числа, причём $\lambda_i\ge 0$, $i\in J_m$. Применяя отображения $p_n(Z)$ и $r_n(Z)$, сформируем множества $\left\{X_1, X_2, ..., X_m\right\}$ и $\left\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\right\}$, где $X_i=p_n\left(Z_i\right)$, $Y_i=r_n\left(Z_i\right)$, $i\in J_m$. Построим линейные комбинации элементов Z_i в пространстве $\mathbf{I_s^nR}$, а также элементов X_i и Y_i в пространстве R^n с коэффициентами λ_i, $i\in J_m$:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Z_i,\ Z\in\mathbf{I_s^nR}; \tag{7}$$

$$X=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i\ ,\ X\in R^n; \tag{8}$$

$$Y=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Y_i\ ,\ Y\in R^n\ . \tag{9}$$

Покажем, что любая линейная комбинация Z элементов Z_i, $i\in J_m$, вида (7) может быть получена с помощью линейных комбинаций X элементов X_i, $i\in J_m$, и Y элементов Y_i, $i\in J_m$, вида (8) и (9) соответственно. Справедливость этого утверждения следует из таких соотношений для каждой координаты $\left\langle X_j \right\rangle\in \mathbf{I_s R}$, $j\in J_n$ точки $Z=\left(\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \ldots, \langle X_n\rangle\right)\in \mathbf{I_s^n R}$:

$$\left\langle X_j \right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\left\langle X_j^i \right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\left\langle x_j^i, \nu_{x_j^i} \right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\left\langle \lambda_i x_j^i, \lambda_i\nu_{x_j^i} \right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_j^i, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nu_{x_j^i} \right\rangle.$$

Но $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_j^i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i=X$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nu_{x_j^i}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Y_i=Y$.

С другой стороны, любой паре линейных комбинаций элементов X_i, $i\in J_m$, вида (8) и элементов Y_i, $i\in J_m$, вида (9) соответствует линейная комбинация Z элементов Z_i, $i\in J_m$, вида (7). Покажем это.

Пусть $$X=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot p_n\left(Z_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i;$$

$$Y=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Y_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot r_n\left(Z_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nu_{x_i}\ .$$

Но $\left\langle \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nu_{x_i} \right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nu_{x_i} \right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Z_i=Z$.

Таким образом, всякой линейной комбинации элементов Z_i, $i\in J_m$, вида (7) соответствует пара линейных комбинаций элементов X_i, $i\in J_m$ вида (8) и элементов Y_i, $i\in J_m$, вида (9) с теми же коэффициентами. Верно и обратное утверждение. Всякой паре линейных комбинаций элементов $X_i=p_n\left(Z_i\right)$ с коэффициентами $\lambda_i\geq 0$, $i\in J_m$, и элементов $Y_i=r_n\left(Z_i\right)$ с коэффициентами $\lambda_i\geq 0$, $i\in J_m$, соответствует линейная комбинация Z элементов Z_i с теми же коэффициентами $\lambda_i\geq 0$, $i\in J_m$.

Поскольку выпуклая комбинация является частным случаем линейной комбинации при $0\leq\lambda_i\leq 1$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, то сформулированные выше утверждения о соответствии линейных комбинаций в пространствах $\mathbf{I_s^n R}$ и R^n распространяются на выпуклые комбинации этих элементов.

Данный подход к построению интервального выпуклого многогранника позволяет с одной стороны, рациональным образом учесть погрешности исходных данных, а с другой – применить известные методы евклидовой геометрии для исследования свойств многогранника в $\mathbf{I_s^n R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaucher E. Interval Analysis in the Extended Interval Space* **IR** *// Comp. Suppl. – 1980. – № 2. – P. 33 - 49.*
2. *Stoyan Yu. G. The extended interval space and elementary mappings // Proc. of the IMACS–GAMM Intern. Symp. on Numerical Methods and Error Bounds. – Oldenburg (Germany). – 1995. – P. 270 - 279.*
3. *Стоян Ю.Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1996. – № 7. – С. 23 - 25.*
4. *Романова Т.Е. Интервальное пространство* $\mathbf{I_s^n R}$ *// Доклады НАН Украины. – 2000. – № 9. – С. 36 - 41.*
5. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.*
6. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.*
7. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1997. – № 7. – С. 56 - 60.*
8. *Стоян Ю.Г, Романова Т.Е., Сысоева Ю. А. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников// Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1998. – № 9. – С. 114 - 120.*
9. *Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 3. – С. 131 - 138.*
10. *Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.*
11. *Стоян Ю.Г. Выпуклые интервальные многоугольники // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 2000. – № 5. – С. 33 - 39.*
12. *Стоян Ю.Г. Интервальное пространство* $\mathbf{I_s^n R}$ *. Интервальные уравнения // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1997. – № 1. – С. 27 - 31.*

Поступила 20.08.2002

ГРЕБЕННИК Игорь Валериевич, *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники Харьковского НУРЭ. В 1988 г. окончил ХИРЭ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.*

ЕВСЕЕВА Людмила Григорьевна, *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Полтавского военного института связи. Окончила ХГУ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.*

РОМАНОВА Татьяна Евгеньевна, *канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник*

отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАН Украины. Окончила ХИРЭ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.