

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$

к.ф.-м.н. И.В. Гребенник, к.ф.-м.н. Л.Г. Евсева, к.ф.-м.н. Т.Е. Романова
(представил д.т.н. Н.И. Гиль)

Вводится понятие интервального выпуклого множества в интервальном пространстве $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$. В этом пространстве определяются интервальная выпуклая оболочка точечного интервального множества и интервальный выпуклый многогранник, рассматриваются некоторые их свойства.

Применение теории интервального анализа [1 – 4] при моделировании и решении задач геометрического проектирования с учётом погрешностей исходных данных представляет интерес в оптимизационных, в том числе комбинаторных моделях и методах [5, 6].

В основе моделей и методов евклидовой комбинаторной оптимизации лежит понятие комбинаторного многогранника [5, 6], вершины которого формируют область допустимых решений комбинаторной задачи. Построение и использование комбинаторных многогранников в задачах оптимизации в евклидовом пространстве подробно исследованы (например, [5, 6]).

Однако, в данных моделях и методах погрешности параметров непосредственно не учитываются. Математические модели оптимизационных задач геометрического проектирования с учётом погрешностей исходных данных описаны в ряде работ [7 – 9].

Для построения адекватных математических моделей и разработки эффективных методов решения оптимизационных задач геометрического проектирования с учётом погрешностей исходных данных представляет интерес описание комбинаторных многогранников в интервальном пространстве $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ [4]. С этой целью необходимо ввести ряд понятий.

Рассмотрим $Z = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ – элемент n -мерного интервального пространства $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$, $\langle X_i \rangle = \langle x_i, v_{x_i} \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$, $i \in J_n$, $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{I}_s \mathbf{R} \times \mathbf{I}_s \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{I}_s \mathbf{R}}_n$, где $\mathbf{I}_s \mathbf{R}$ – расширенное пространство централизованных интервалов [1 – 3].

Пусть $Z_1, Z_2, \dots, Z_m \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$. Пользуясь операциями сложения и умножения элемента на действительное число, введёнными в пространстве

$\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ [4], дадим следующие определения.

Определение 1. Точка $Z = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ называется комбинацией точек Z_1, Z_2, \dots, Z_m , если существуют такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, что $Z = \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_i$.

Отметим, что пространство $\mathbf{I}_s \mathbf{R}$ не является линейным [2, 3], поскольку

$$\lambda \langle X_i \rangle = \langle \lambda x_i, |\lambda| v_{x_i} \rangle, \quad \forall \langle X_i \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}.$$

Определение 2. Комбинация точек $Z_1, Z_2, \dots, Z_m \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ называется линейной, если $\lambda_i \geq 0$, $i \in J_m = \{1, 2, \dots, m\}$.

Определение 3. Комбинация точек $Z_1, Z_2, \dots, Z_m \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ называется выпуклой, если коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Пусть $Z = (\langle x_1, v_{x_1} \rangle, \langle x_2, v_{x_2} \rangle, \dots, \langle x_n, v_{x_n} \rangle) \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ – произвольная точка. В пространстве $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ введены отображения $p_n(Z): \mathbf{I}_s^n \mathbf{R} \rightarrow R^n$ и $r_n(Z): \mathbf{I}_s^n \mathbf{R} \rightarrow R^n$ [4], такие, что:

$$p_n(Z) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n; \quad r_n(Z) = (v_{x_1}, v_{x_2}, \dots, v_{x_n}) \in R^n.$$

Используя эти отображения, дадим определение выпуклого множества в пространстве $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$.

Определение 4. Множество $\mathbf{G} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ называется выпуклым, если в пространстве R^n выпуклыми являются множества:

$$G_x = \{x \mid x \in R^n, \quad x = p_n(Z), \quad \forall Z \in \mathbf{G}\}; \quad (1)$$

$$G_y = \{y \mid y \in R^n, \quad y = r_n(Z), \quad \forall Z \in \mathbf{G}\}. \quad (2)$$

Таким образом, в основе сформулированного понятия выпуклости множества в $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ лежит выпуклость его образов G_x и G_y в евклидовом пространстве R^n . В связи с этим, для выпуклых в $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ множеств справедливы многие свойства выпуклых в R^n множеств [10]. Отметим некоторые из них.

Теорема 1. Множество $\mathbf{G} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ выпукло тогда и только тогда, когда оно содержит все выпуклые комбинации любого конечного числа своих точек.

Доказательство следует из справедливости соответствующего утвер-

ждения для множеств G_x и G_y в R^n .

Рассмотрим вопрос о выпуклости пересечения выпуклых множеств в $I_s^n \mathbf{R}$. При этом операцию пересечения множеств в $I_s^n \mathbf{R}$ будем рассматривать в классическом теоретико-множественном виде. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $G_i, i \in J_N, (J_N - \text{конечное или бесконечное множество}) -$ выпуклые в $I_s^n \mathbf{R}$ множества. Тогда пересечение $G = \bigcap_i G_i$ выпукло в $I_s^n \mathbf{R}$.

Доказательство. Поскольку G_i выпуклы в $I_s^n \mathbf{R}$, то для каждого из них множества G_{x_i} и G_{y_i} выпуклы в R^n . Пусть $X, Y \in G$. Тогда, по определению пересечения множеств X, Y принадлежат каждому из $G_i, i \in J_N$. В силу выпуклости в $I_s^n \mathbf{R}$ множеств G_i , для любого из них выполняются соотношения:

$$u = \lambda p_n(X) + (1-\lambda)p_n(Y) \in G_{x_i}; w = \lambda r_n(X) + (1-\lambda)r_n(Y) \in G_{y_i}; 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Это означает, что $u \in G_x$ и $w \in G_y$, т.е. множества G_x и G_y выпуклы в R^n . Из этого следует, что множество G выпукло в $I_s^n \mathbf{R}$.

Определение 5. Пересечение всех выпуклых в $I_s^n \mathbf{R}$ множеств, содержащих множество $G \subset I_s^n \mathbf{R}$, называется интервальной выпуклой оболочкой множества G .

Выпуклую интервальную оболочку множества G в $I_s^n \mathbf{R}$ обозначим *ico* G .

Теорема 3. Пусть $\bar{G} \subset I_s^n \mathbf{R}$ – произвольное множество, а $G = \text{ico } \bar{G}$ – его интервальная выпуклая оболочка. Тогда множества G_x и G_y вида (1) и (2), порождённые множеством G , являются выпуклыми оболочками в R^n соответственно множеств \bar{G}_x и \bar{G}_y , порождённых множеством \bar{G} .

Доказательство. Пусть $\bar{G} \subset I_s^n \mathbf{R}$, а $G^i, i \in D$, где D – множество произвольной мощности, – выпуклые в $I_s^n \mathbf{R}$ множества, такие что $\bar{G} \subseteq G^i, \forall i \in D$. Согласно определению 4, множества G_x^i и G_y^i вида (1) и (2), порождаемые множеством G^i , выпуклы в R^n , причём для всех i справедливы соотношения

$$\bar{G}_x \subseteq G_x^i, \bar{G}_y \subseteq G_y^i. \quad (3)$$

Рассмотрим множества:

$$\mathbf{G} = \bigcap_{i \in D} \mathbf{G}^i; \quad (4)$$

$$\tilde{G}_x = \bigcap_{i \in D} G_x^i; \quad (5)$$

$$\tilde{G}_y = \bigcap_{i \in D} G_y^i. \quad (6)$$

По определению, $\mathbf{G} = \text{ico } \bar{\mathbf{G}}$, а множества \tilde{G}_x и \tilde{G}_y выпуклы в R^n . Покажем, что $\tilde{G}_x = G_x$, где G_x – множество вида (1), порожденное выпуклым в $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ множеством \mathbf{G} . Пусть $Z \in \mathbf{G}^i, i \in D$. Тогда $X = p_n(Z) \in G_x^i \quad \forall i \in D$ и, следовательно, $X \in \tilde{G}_x$. С другой стороны, $Z \in \mathbf{G}$ согласно (4), поэтому $X = p_n(Z) \in G_x$. Следовательно, $(X \in \tilde{G}_x) \Leftrightarrow (X \in G_x)$, т.е. $\tilde{G}_x = G_x$. Аналогично показывается, что $\tilde{G}_y = G_y$.

В соответствии с (3 – 5) множества \tilde{G}_x и \tilde{G}_y , принадлежащие R^n , представляют собой выпуклые оболочки соответственно множеств \bar{G}_x и \bar{G}_y . Множества G_x и G_y в R^n порождены множеством $\mathbf{G} = \text{ico } \bar{\mathbf{G}}$. Совпадение множеств $\tilde{G}_x = G_x$ и $\tilde{G}_y = G_y$ приводит к справедливости утверждения теоремы.

Теорема 4. Интервальная выпуклая оболочка множества $\mathbf{G} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ состоит из тех и только тех точек, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа точек из \mathbf{G} .

Доказательство этого утверждения следует из справедливости соответствующего утверждения для множеств G_x, G_y в пространстве R^n .

Рассмотрим выпуклую интервальную оболочку множества $\bar{\mathbf{G}} = \{Z_1, Z_2\} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ – множество $\mathbf{G} = \text{ico } \bar{\mathbf{G}} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$; здесь

$$Z_j = (\langle x_1, v_{x_1} \rangle, \langle x_2, v_{x_2} \rangle, \dots, \langle x_n, v_{x_n} \rangle), \quad j \in J_n.$$

Множество $\mathbf{G} = \text{ico } \bar{\mathbf{G}}$ представляет собой такое множество, для которого G_x и G_y являются отрезками в R^n с границами $(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_n(Z_1)$; $(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_n(Z_2)$ и $(v_{x_1}, v_{x_2}, \dots, v_{x_n}) = r_n(Z_1)$; $(v_{y_1}, v_{y_2}, \dots, v_{y_n}) = r_n(Z_2)$ соответственно.

Определение 6. Интервальная выпуклая оболочка множества точек $Z_0, Z_1, \dots, Z_m \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$, таких, что системы векторов

$$\{p_n(Z_i) - p_n(Z_0), \quad i \in J_m\} \text{ и } \{r_n(Z_i) - r_n(Z_0), \quad i \in J_m\}$$

в R^n линейно независимы, называется интервальным симплексом, натянутым на точки Z_0, Z_1, \dots, Z_m , и обозначается $S_m(Z_0, Z_1, \dots, Z_m)$. Точки Z_0, Z_1, \dots, Z_m называются вершинами интервального симплекса.

В случае если $m = n$, интервальный симплекс называется стандартным n -мерным интервальным симплексом.

Согласно теореме 3, интервальный симплекс можно представить так:

$$S_m = \{Z: Z = \sum_{i=0}^m \lambda_i Z_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1\}.$$

Определение 7. Интервальная выпуклая оболочка множества точек $Z_1, \dots, Z_m \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$, где m – конечно, называется интервальным выпуклым многогранником, натянутым на эти точки.

Следует заметить, что определение интервального выпуклого многоугольника введено в работе [11] на основе понятий интервальной прямой и интервальных неравенств [12].

Рассмотрим элементы Z_1, Z_2, \dots, Z_m пространства $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ и порожаемый ими многогранник $\mathbf{T}(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = \text{ico}\{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$. Выпуклое в $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ множество $\mathbf{T}(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ порождает выпуклые в R^n множества \mathbf{T}_x и \mathbf{T}_y вида (1) и (2). В соответствии с теоремой 3 множества \mathbf{T}_x и \mathbf{T}_y представляют собой выпуклые оболочки множеств $\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \subset R^n$ и $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\} \subset R^n$, где $X_i = p_n(Z_i)$, $Y_i = r_n(Z_i)$, $i \in J_m$. Следуя [10], \mathbf{T}_x и \mathbf{T}_y представляют собой выпуклые многогранники в R^n , порождённые множествами $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ и $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ соответственно.

Пусть $Z_1, Z_2, \dots, Z_m \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – действительные числа, причём $\lambda_i \geq 0$, $i \in J_m$. Применяя отображения $p_n(Z)$ и $r_n(Z)$, сформируем множества $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ и $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$, где $X_i = p_n(Z_i)$, $Y_i = r_n(Z_i)$, $i \in J_m$. Построим линейные комбинации элементов Z_i в пространстве $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$, а также элементов X_i и Y_i в пространстве R^n с коэффициентами λ_i , $i \in J_m$:

$$Z = \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_i, \quad Z \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}; \tag{7}$$

$$X = \sum_{i=1}^m \lambda_i X_i, \quad X \in R^n; \quad (8)$$

$$Y = \sum_{i=1}^m \lambda_i Y_i, \quad Y \in R^n. \quad (9)$$

Покажем, что любая линейная комбинация Z элементов $Z_i, i \in J_m$, вида (7) может быть получена с помощью линейных комбинаций X элементов $X_i, i \in J_m$, и Y элементов $Y_i, i \in J_m$, вида (8) и (9) соответственно. Справедливость этого утверждения следует из таких соотношений для каждой координаты $\langle X_j \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, j \in J_n$ точки $Z = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$:

$$\langle X_j \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \langle X_j^i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \langle x_j^i, v_{x_j^i} \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \lambda_i x_j^i, \lambda_i v_{x_j^i} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i x_j^i, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_{x_j^i} \right\rangle.$$

$$\text{Но } \sum_{i=1}^m \lambda_i x_j^i = \sum_{i=1}^m \lambda_i X_i = X, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i v_{x_j^i} = \sum_{i=1}^m \lambda_i Y_i = Y.$$

С другой стороны, любой паре линейных комбинаций элементов $X_i, i \in J_m$, вида (8) и элементов $Y_i, i \in J_m$, вида (9) соответствует линейная комбинация Z элементов $Z_i, i \in J_m$, вида (7). Покажем это.

$$\text{Пусть } X = \sum_{i=1}^m \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot p_n (Z_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i;$$

$$Y = \sum_{i=1}^m \lambda_i Y_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot r_n (Z_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_{x_i}.$$

$$\text{Но } \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_{x_i} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_{x_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_i = Z.$$

Таким образом, всякой линейной комбинации элементов $Z_i, i \in J_m$, вида (7) соответствует пара линейных комбинаций элементов $X_i, i \in J_m$ вида (8) и элементов $Y_i, i \in J_m$, вида (9) с теми же коэффициентами. Верно и обратное утверждение. Всякой паре линейных комбинаций элементов $X_i = p_n (Z_i)$ с коэффициентами $\lambda_i \geq 0, i \in J_m$, и элементов $Y_i = r_n (Z_i)$ с коэффициентами $\lambda_i \geq 0, i \in J_m$, соответствует линейная комбинация Z элементов Z_i с теми же коэффициентами $\lambda_i \geq 0, i \in J_m$.

Поскольку выпуклая комбинация является частным случаем линейной комбинации при $0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, то сформулированные выше утвер-

ждения о соответствии линейных комбинаций в пространствах $I_s^n \mathbf{R}$ и R^n распространяются на выпуклые комбинации этих элементов.

Данный подход к построению интервального выпуклого многогранника позволяет с одной стороны, рациональным образом учесть погрешности исходных данных, а с другой – применить известные методы евклидовой геометрии для исследования свойств многогранника в $I_s^n \mathbf{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaucher E. *Interval Analysis in the Extended Interval Space \mathbf{IR}* // *Comp. Suppl.* – 1980. – № 2. – P. 33 - 49.
2. Stoyan Yu. G. *The extended interval space and elementary mappings* // *Proc. of the IMACS-GAMM Intern. Symp. on Numerical Methods and Error Bounds.* – Oldenburg (Germany). – 1995. – P. 270 - 279.
3. Стоян Ю.Г. *Метрическое пространство централизованных интервалов* // *Докл. НАН Украины. Сер. А.* – 1996. – № 7. – С. 23 - 25.
4. Романова Т.Е. *Интервальное пространство $I_s^n \mathbf{R}$* // *Доклады НАН Украины.* – 2000. – № 9. – С. 36 - 41.
5. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.* – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
6. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. *Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації.* – К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
7. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. *Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных* // *Докл. НАН Украины. Сер. А.* – 1997. – № 7. – С. 56 - 60.
8. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю. А. *Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников* // *Докл. НАН Украины. Сер. А.* – 1998. – № 9. – С. 114 - 120.
9. Ємець О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. *Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников* // *Кибернетика и системный анализ.* – 2001. – № 3. – С. 131 - 138.
10. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.
11. Стоян Ю.Г. *Выпуклые интервальные многоугольники* // *Докл. НАН Украины. Сер. А.* – 2000. – № 5. – С. 33 - 39.
12. Стоян Ю.Г. *Интервальное пространство $I_s^n \mathbf{R}$. Интервальные уравнения* // *Докл. НАН Украины. Сер. А.* – 1997. – № 1. – С. 27 - 31.

Поступила 20.08.2002

ГРЕБЕННИК Игорь Валериевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники Харьковского НУРЭ. В 1988 г. окончил ХИРЭ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.

ЕВСЕЕВА Людмила Григорьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Полтавского военного института связи. Окончила ХГУ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.

РОМАНОВА Татьяна Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник

отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАН Украины. Окончила ХИРЭ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.